Consideraciones para la mejora de la educación matemática en la UNAM

Directorio

Universidad Nacional Autónoma de México

Dr. José Narro Robles
Rector

Dr. Eduardo Bárzana García
Secretario General

Ing. Leopoldo Silva Gutiérrez
Secretario Administrativo

Dr. Francisco José Trigo Tavera
Secretario de Desarrollo Institucional

Lic. Enrique Balp Díaz
Secretario de Servicios a la Comunidad

Lic. Luis Raúl González Pérez
Abogado General

Universidad Nacional Autónoma de México

Consideraciones para la mejora de la educación matemática en la UNAM

Seminario Universitario para la Mejora de la Educación Matemática en la UNAM (SUMEM)

José Luis Abreu León ▪ Héctor Benítez Pérez ▪ Felipe Bracho Carpizo
Javier Bracho Carpizo ▪ Silvia Guadalupe Canabal Cáceres ▪ José Juan Contreras Espinosa
Mario Emilio Domínguez Baños ▪ Eugenio León Fautsch Tapia ▪ Manuel Jesús Falconi Magaña
Ángel Homero Flores Samaniego ▪ Rogelio González Zepeda ▪ Armando Hernández Solís
Hugo Mael Hernández Trevethan ▪ María Elizabeth Herrera Islas ▪ Manuel Hernández Rosales
Marina Kriscautzky Laxague ▪ Alma Delia Leos Hidalgo ▪ Jaime Licea Durán
Jeanett López García ▪ Laura Isabel Mora Reyes ▪ Salvador Moreno Guzmán
Patricia Murillo Villegas ▪ Giselle Ochoa Hofmann ▪ Lidia Guadalupe Ortega González
Nelly Rigaud Téllez ▪ Marco Antonio Santillán Vázquez ▪ Francisco José Trigo Tavera
Juan Ursul Solanes ▪ Guadalupe Vadillo Bueno ▪ Rosa María Valle Gómez-Tagle
Edith Zepeda Cabrera ▪ Paloma Zubieta López ▪ Judith Zubieta García

Primera edición ____fecha_____ 2014
DR© 2014 Universidad Nacional Autónoma de México.
Ciudad Universitaria, Coyoacán, C.P. 04510 México, Distrito Federal.

ISBN 978-XXX XXX XXX

"Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales"

Impreso y hecho en México / Printed and made in Mexico.

El Comité Editorial de la Secretaría de Desarrollo Institucional de la UNAM reconoce el trabajo que realizaron el Dr. Carlos Hernández Garciadiego y el M en C Francisco de Jesús Struck Chávez como revisores técnicos.

Diseño de portada: LSCA Edgar Emmanuel Herrera López
Corrección de estilo: María Julio Hidalgo López
Ilustraciones: SUMEM y DCV Firely Avril Braulio Ortiz
Diseño editorial y formación: DCV Firely Avril Braulio Ortiz
Cuidado de la edición: Dr. Manuel Jesús Falconi Magaña, Dr. Ángel Homero Flores Samaniego y Mat. Manuel Hernández Rosales.

Tabla de Contenido

Prefacio 11

Introducción 13

Creación del grupo de trabajo para la mejora de la educación matemática 17

Capítulo 1. El contexto educativo 19
1.1 Contexto internacional 21
1.2 Contexto nacional 26

Capítulo 2. Consideraciones para mejorar la enseñanza de las matemáticas en el Bachillerato de la UNAM 31
2.1 Contenidos y aprendizajes 35
2.2 Procesos de enseñanza-aprendizaje 36
2.3 Valores y actitudes 36

Capítulo 3. Estándares disciplinarios 39
3.1 Conocimientos, destrezas, actitudes y valores 42
3.2 Principios que guían los estándares 42
3. 3 Estándares para números y álgebra 45
3.3.1 Uso y habilidad en el manejo de los números 45
3.3.2 Planteamiento algebraico de problemas 46
3.3.3 Solución algebraica de problemas 46
3.3.4 Interpretación de los pasos intermedios y de las soluciones 47

3.3.5 Comprensión de las relaciones funcionales 47
3.3.6 Construcción y verificación de desarrollos algebraicos 47
3.3.7 Razonamiento algebraico básico 48
3.3.8 Manipulación algebraica avanzada 48
3.3.9 Cultura algebraica 48
3.4 Estándares para Geometría 49
3.4.1 Elementos básicos de geometría Euclidiana en dos dimensiones 49
3.4.2 El triángulo y su geometría 49
3.4.3 La geometría del círculo 50
3.4.4 Elementos básicos de geometría tridimensional 50
3.4.5 Las cónicas y sus representaciones 50
3.4.6 Proyecciones y perspectivas 50
3.4.7 Los vectores y su aplicación 50
3.4.8 Ecuaciones paramétricas 51
3.4.9 Ecuaciones cuadráticas en tres dimensiones 51
3.4.10 Razonamiento deductivo y validación de conjeturas 51
3.4.11 Cultura geométrica 51
3.5 Estándares para Funciones y Cálculo 51
3.5.1 Concepto de función 52
3.5.2 Modelación con funciones 52
3.5.3 Idea intuitiva de aproximación y del concepto de límite 52
3.5.4 Tangente de una curva 52
3.5.5 Razón de cambio instantánea y su relación con la tangente de una curva 53
3.5.6 Funciones exponenciales y logarítmicas 53
3.5.7 Cálculo de tangentes a ciertas curvas usando la definición de límite 53
3.5.8 Análisis de las gráficas de funciones 53
3.5.9 Cálculos de máximos y mínimos 53
3.5.10 Idea intuitiva de la integral en términos de sumas de Riemann 53
3.5.11 Aplicaciones del concepto de integral 54
3.5.12 Problemas que involucran ecuaciones diferenciales simples 54
3.5.13 Desarrollo histórico de los conceptos del cálculo 54
3.6 Estándares para Estadística y Probabilidad 54
3.6.1 Alfabetización estadística 55
3.6.2 Razonamiento probabilístico 56
3.6.3 Inferencia 56

Capítulo 4. Problemas ilustrativos 59
4.1 Problemas de álgebra 61
4.2 Problemas de geometría 64
4.3 Problemas de cálculo y funciones 69

4.4 Problemas de probabilidad y estadística 78

Capítulo 5. Estrategias didácticas para mejorar el aprendizaje en el aula 87
5.1 ¿Qué es hacer matemáticas? 89
5.2 Estrategias didácticas 90

Capítulo 6. Evaluación en el aula 93
6.1 El carácter de la evaluación 95
6.2 Tipos de evaluación 96
6.3 Algunos antecedentes 97
6.4 La evaluación en el aula 98

Capítulo 7. Formación y actualización de profesores 101

Capítulo 8. Participación del área de gestión en el mejoramiento de la educación matemática 107
8.1 Selección de profesores de nuevo ingreso 110
8.2 Las funciones de los profesores de tiempo completo 111
8.3 La estructura, los recursos y los programas de apoyo académico 112
8.4 Planeación y evaluación de las actividades académicas 113
8.5 Cultura y clima institucionales 114

Capítulo 9. Difusión y promoción de la Cultura Matemática 117

Capítulo 10. Estructura organizativa de las actividades académicas 123
10.1 Introducción 125
10.2 Acuerdo de creación del SUMEM 125
10.3 Plan de trabajo anual 126
10.4 Estructura organizativa del trabajo 127

Referencias 129

Glosario 133

Prefacio

En el presente documento se sintetiza el trabajo de más de un año de un conjunto heterogéneo de universitarios con una preocupación que seguramente ustedes comparten: los bajos resultados de nuestros estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles. Por supuesto no afecta a todos, pero son justamente los que reprueban o tienen bajo desempeño los que nos llaman a plantearnos qué podemos hacer para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la UNAM.

En 2012 se conformó el Grupo de Trabajo para la Mejora de la Enseñanza de las Matemáticas (GTMEM) convocado por el Dr. José Narro Robles con el pedido explícito de analizar las causas del problema y proponer soluciones. El grupo académico estuvo integrado por profesores, técnicos académicos, investigadores y funcionarios tanto de los subsistemas de Bachillerato: ENP y CCH, como del Programa de Bachillerato a Distancia y de las facultades e institutos en donde la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas tienen una fuerte incidencia en la preparación de los estudiantes. La coordinación del grupo quedó a cargo del titular de la Secretaría de Desarrollo Institucional.

Con la firme creencia de que el trabajo colegiado es el mejor sendero para cumplir su cometido, el GTMEM se ha transformado en el Seminario Universitario para la Mejora de la Educación Matemática (SUMEM), el cual se describe a grandes rasgos en el Capítulo 10 y cuya primera gran tarea será abrir un periodo de análisis, revisión y discusión del contenido del presente texto para continuar con su desarrollo.

Enseñar y aprender matemáticas no es una tarea sencilla. Los resultados de aprendizaje de los alumnos son el reflejo de muchas variables que intervienen a la vez, haciendo difícil concluir qué es lo que hay que hacer para mejorarlos. Sin embargo, estamos convencidos de que la mejora de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas depende de todos los involucrados: profesores, investigadores, técnicos académicos, funcionarios, alumnos, padres y sociedad.

En las páginas que siguen ponemos a su disposición el fruto de las discusiones, puntos de vista y consideraciones acerca de las causas del problema y sus posibles soluciones. Se describen las principales conclusiones del GTMEM acerca de la enseñanza de las matemáticas y de su aprendizaje en el bachillerato. Algunas de las preguntas a las que tratamos

de dar respuesta son: 1- ¿cómo enseñar las matemáticas?, 2- ¿qué conocimientos debe tener el egresado del bachillerato?, 3- ¿por qué estudiar matemáticas? Las opiniones vertidas se fundamentan, lo mismo en la experiencia profesional de los miembros del grupo, como en las experiencias previas de reflexión dentro de la UNAM y en los resultados publicados en algunas investigaciones.

Es una obra ecléctica, en el sentido que combina diversas ideas, sin ser necesariamente el consenso. Sin embargo, sus propuestas caen dentro de lo mínimo exigible y lo máximo deseable; que cada uno de los miembros del GTMEM acepta como una posibilidad adecuada para el bachillerato.

Este documento es un punto de partida y no de llegada, es la invitación a formar parte de los trabajos del SUMEM para avanzar hacia el fin propuesto: la mejora de la educación matemática en la UNAM. Construir los caminos para llegar a tal fin es un trabajo continuo y permanente que debe involucrar a docentes, investigadores, funcionarios, técnicos académicos y autoridades de los tres niveles (bachillerato, licenciatura y posgrado).

Ponemos, pues, en sus manos, el texto *Consideraciones para la mejora de la educación matemática en el bachillerato,* que seguramente se verá enriquecido con la discusión colegiada de todos.

Dr. Manuel Jesús Falconi Magaña
Coordinador del SUMEM

Introducción

El desarrollo de los individuos en una sociedad demandante y competitiva requiere cada vez más que todas las personas, no sólo las que aspiran a ejercer carreras profesionales, sean competentes en comprensión lectora, matemáticas y tecnología de la información, por mencionar algunas habilidades.

En un entorno real, las personas se enfrentan con una serie de problemas al ir de compras, viajar, ocuparse de su economía doméstica, cocinar o revisar información estadística en los periódicos. En dichas situaciones, el empleo de razonamientos matemáticos contribuye a aclarar, formular y resolver los problemas que se plantean.

Este uso de las matemáticas se basa en las habilidades y los conocimientos adquiridos y practicados principalmente en el medio escolar, pero exigen también la capacidad de aplicar esas habilidades a contextos menos estructurados, aquellos que carecen de instrucciones precisas, y en los que se debe decidir cuál será el conocimiento más adecuado y cuál será la forma más útil de aplicarlo.

Por ello, nos hemos centrado en la necesidad de transformar los esquemas actuales del proceso de enseñanza-aprendizaje. Consideramos como ejes esenciales: la formación y la actualización de profesores, los planes y los programas de estudio y el cambio de paradigma en el aprendizaje de los estudiantes. Entre los aspectos a analizar se contempla el aprendizaje a lo largo de toda la vida, el apoyo académico-administrativo y la difusión de la Cultura Matemática; todo bajo un enfoque humanista y responsable ante las necesidades y oportunidades del desarrollo de nuestro país.

Los ejes esenciales surgen al describir y analizar una problemática en el Bachillerato caracterizada por niveles altos de reprobación, bajo rendimiento, carencia de hábitos de estudio, problemas de adaptación a la institución, malas relaciones entre pares y entre maestros-alumnos, deserción, y rezago escolar.

La problemática para la enseñanza de las matemáticas se ve agravada, entre otros, por los siguientes factores: la dificultad de vinculación con otras materias, las deficiencias en los conocimientos previos, principalmente en las matemáticas mismas y en el manejo del español, dispersas estrategias de aprendizaje, entornos socioculturales adversos que favorecen su mala reputación y un inadecuado acondicionamiento de aulas, carentes de tec-

nología. Lo anterior se traduce en una baja motivación en el estudiantado del Bachillerato ante las matemáticas, evidenciados en su bajo desempeño y en su actitud.

La importancia de las matemáticas, tanto en su contribución a la sociedad, como en su capacidad intrínseca para el desarrollo personal, ha sido determinante para que en la Universidad se atiendan proyectos relacionados con el currículo, métodos de enseñanza y evaluación del aprendizaje, vinculación entre la teoría y la práctica, programas de apoyo a los alumnos, las TIC, Cultura Matemática y ámbitos administrativos.

El presente libro es un documento de trabajo en el que se muestran los avances y las propuestas de actividades para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, así como la imagen de esta disciplina en el seno de nuestra sociedad (en particular en la comunidad universitaria).

Se inicia con la sección "Creación del grupo de trabajo para la mejora de la educación matemática" (GTMEM), donde se describen, a grandes rasgos, los principales aspectos del problema de la enseñanza de las matemáticas, así como la organización de los grupos que se crearon para trabajar sobre esta cuestión y que fueron coordinados por la Secretaría de Desarrollo Institucional (SDI) de la UNAM.

Posteriormente, en el Capítulo 1, *El Contexto educativo,* se da una descripción del contexto educativo nacional e internacional, mismo que podría dar claves para mejorar el desempeño escolar de nuestros estudiantes y algunas consideraciones generales que atañen al conocimiento matemático.

En el Capítulo 2, *Consideraciones para mejorar la enseñanza de las matemáticas en el Bachillerato de la UNAM*, se presenta una definición de la Cultura Matemática del bachiller, la cual comprende aspectos básicos del pensamiento matemático y razonamiento lógico, conceptos matemáticos fundamentales, herramientas tecnológicas y valores universitarios.

En el Capítulo 3, *Estándares disciplinarios*, se presenta una descripción de los conocimientos, las aptitudes y las habilidades matemáticas que deberían ser parte del acerbo, tanto estudiantil como docente. El documento se organiza en los siguientes tres rubros: conocimientos y destrezas, principios y estándares. Los estándares son presentados en 4 áreas: números y álgebra; cálculo y funciones; geometría y estadística, y probabilidad.

A su vez, en Capítulo 4, *Problemas ilustrativos*, se presenta una muestra de los problemas correspondientes a los estándares que dan una idea de los conocimientos y nivel que debería tener un bachiller al egresar. Entre éstos hay problemas que podrían servir al profesor para planear situaciones de aprendizaje.

Una parte sustantiva de la propuesta es la consideración de las estrategias didácticas para mejorar el aprendizaje, por lo que en el Capítulo 5, *Estrategias didácticas para mejorar el aprendizaje en el aula*, se presenta una reflexión sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje y el tipo de actividades que profesores y estudiantes pueden realizar para alcanzar los estándares.

La evaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje, desde la perspectiva del profesor en su quehacer docente, cobra especial importancia para el logro del objetivo propuesto; en particular una evaluación formativa que arroje luz sobre el desempeño del estudiante y del profesor y sobre la efectividad del currículo. Es por esto que se dedica a este tema el Capítulo 6, *Evaluación en el aula*.

En el capítulo 7, *Formación y actualización de profesores,* se exponen las principales características que debe tener un proceso permanente de fortalecimiento de la actividad docente, congruente con los principios expuestos en el capítulo anterior. Su contenido se concibe como guía y marco conceptual indispensable para la formación y la actualización de profesores.

Una institución requiere esencialmente de una planta académica comprometida y competente para llevar a cabo su misión educativa, además de planes y programas de estudio adecuados y actualizados y de alumnos con disposición para aprender. Asimismo, es necesario contar con políticas y condiciones, materiales y organizacionales, que permitan el desarrollo cotidiano de las actividades académicas. También se necesitan mecanismos para atender las múltiples necesidades y problemas que se derivan de éstas, tal como procedimientos de evaluación orientados a la toma de decisiones y a la mejora del conocimiento matemático en los niveles individual, grupal e institucional. Este es el tema tratado en el Capítulo 8, *Participación del área de gestión en el mejoramiento de la educación matemática*.

La difusión y promoción de la Cultura Matemática es una tarea urgente que busca modificar la percepción de las matemáticas que se tiene en amplios sectores de la sociedad, que, con base en prejuicios y desconocimiento de la importancia de éstas, las rechaza. Para revertir esto se propone una serie de acciones que son explicadas en el Capítulo 9, *Difusión y promoción de la Cultura Matemática*.

En el Capítulo 10, *Estructura organizativa de las actividades académicas*, se aborda la creación del Seminario Universitario para la Mejora de la Educación Matemática, cuya labor será supervisar y crear materiales para la enseñanza, diseñar y mantener actividades de formación y actualización de profesores, estudiar y revisar avances sobre el tema a nivel nacional e internacional y fortalecer vínculos con el sector educativo.

Finalmente, en un anexo se incluye un Glosario con los términos utilizados en el documento.

Reiteramos: el mejoramiento de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas es una actividad constante, por lo tanto se deben crear los medios y los mecanismos necesarios para involucrar a todos los sectores para que a su vez éstos favorezcan la actualización de los profesores y participen en el diseño de nuevas prácticas y en la mejora de las condiciones de trabajo de estudiantes y profesores. Todo lo anterior desarrollado en un ambiente sensible a la necesidad de contar con una educación matemática apoyada en los avances de la ciencia y comprometida socialmente.

Dr. Javier Bracho Carpizo
Dir. Instituto de Matemáticas

Creación del Grupo de Trabajo para la Mejora de la Educación Matemática

La Universidad Nacional Autónoma de México, preocupada por mejorar el nivel de los conocimientos matemáticos de sus estudiantes y del alumnado del país en general, ha emprendido una serie de acciones encaminadas a elevar la calidad de la enseñanza y a fomentar una práctica docente que sea capaz de adecuarse, con oportunidad, a las necesidades cambiantes de nuestra sociedad.

Con el fin de avanzar hacia el logro de este objetivo, entre otras medidas, se conformó en nuestra máxima casa de estudios el Grupo de Trabajo para la Mejora de la Educación Matemática (GTMEM). El grupo se integró por profesores, investigadores y funcionarios tanto de los subsistemas de Bachillerato: ENP, CCH, como del Programa de Bachillerato a Distancia y de las facultades e institutos donde la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas tienen una fuerte incidencia en la preparación de los estudiantes. La coordinación del grupo estuvo a cargo del titular de la Secretaría de Desarrollo Institucional.

Los principales aspectos de tal problemática son:

- **Falta de formación y actualización de los profesores de matemáticas.** En la didáctica de la disciplina, en la propia matemática y en el uso de tecnología(en especial del software especializado, y de tecnología de información y comunicación).
- **Falta de actualización del currículo de matemáticas.** En particular, se pone énfasis en los conceptos teóricos y en procedimientos algorítmicos descuidando la vinculación con otras asignaturas y con situaciones reales.
- **El estudiante frente al aprendizaje de la materia.** Por lo general éste no ve sentido en el aprendizaje de las matemáticas y sólo las considera como un requisito para obtener el certificado o el título.
- **Problemas académico-administrativos.** Como el estatus de los profesores que son, en su mayoría, de asignatura, con grandes cargas de trabajo e inadecuado equipamiento tecnológico en sus aulas.
- **Mala imagen de las matemáticas en la sociedad.** Reflejada en el rechazo hacia su estudio y en la concepción de que es una materia muy difícil, a veces inútil y sólo accesible para algunos.

En una primera etapa, el grupo decidió abordar la problemática de los dos subsistemas de Bachillerato: la Escuela Nacional Preparatoria y el Colegio de Ciencias y Humanidades; también del Programa de Bachillerato a Distancia; dejando para una segunda etapa el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en el nivel superior.

Tomando en cuenta la importancia que tienen las matemáticas en el desarrollo científico y tecnológico de nuestra sociedad, se estableció el siguiente principio básico:

Las matemáticas son parte fundamental de la cultura y permean toda actividad humana, desde el quehacer científico, hasta las manifestaciones artísticas.

Para el análisis de los aspectos problemáticos detectados y la propuesta de posibles soluciones, el GTMEM se dividió en cinco equipos:

- Equipo I: Formación y actualización de profesores.
- Equipo II: Actualización curricular.
- Equipo III: Estrategias didácticas para la mejora del aprendizaje.
- Equipo IV: Apoyo académico-administrativo.
- Equipo V: Difusión de la Cultura Matemática.

La temática que abordó cada equipo, en particular la correspondiente a los tres primeros, no es independiente una de otra, sino que hay traslapos entre ellas. Por tanto, las propuestas se asumieron de manera conjunta por todo el GTMEM.

Paralelamente, se conformó otro grupo de trabajo: Estándares disciplinarios, integrado por siete profesores de la ENP, siete profesores del CCH y seis integrantes del GTMEM, que se encargó de proponer los aprendizajes y contenidos comunes a los dos subsistemas y que, eventualmente, podrían formar parte de sus respectivos programas. Los resultados obtenidos por este grupo de trabajo están expresados en los estándares disciplinarios y alimentan principalmente las propuestas del Equipo II (Actualización curricular).

Después de poco más de año y medio de trabajo continuo, el GTMEM se conformó en el Seminario Universitario para la Mejora de la Educación Matemática (SUMEM) cuya creación se encuentra en el Acuerdo publicado en la Gaceta UNAM, del 12 de septiembre de 2013.

Capítulo 1

El contexto educativo

Capítulo 1.
El contexto educativo

1.1 Contexto internacional

Con el lanzamiento del programa de evaluación PISA (Programme for International Student Assessment) en 1997, por parte de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), la mayoría de los países miembros (y algunos no miembros) han estado preocupados por los resultados que obtienen sus estudiantes en dicha evaluación.

La evaluación de PISA consiste en la aplicación de una serie de exámenes estandarizados a estudiantes cuya edad media es de 15 años. La intención es medir el desempeño de los sistemas educativos de los países participantes, a través de la medición de su competencia en materias clave como la lectura, las matemáticas y las ciencias.

En la tabla siguiente se muestran los resultados de algunos países en la evaluación de 2009.

	Lectura	Matemática	Ciencias
Promedio OCDE	**493**	**496**	**501**
1. **República de Corea**	539	546	538
2. **Finlandia**	536	541	554
3. Canadá	524	527	529
14. EUA	500	487	502
18. Francia	496	497	498
26. España	481	483	488
36. **Chile**	449	441	447
39. Uruguay	426	427	427
40. **México**	425	419	416
44. Colombia	413	381	402
45. **Brasil**	412	382	405

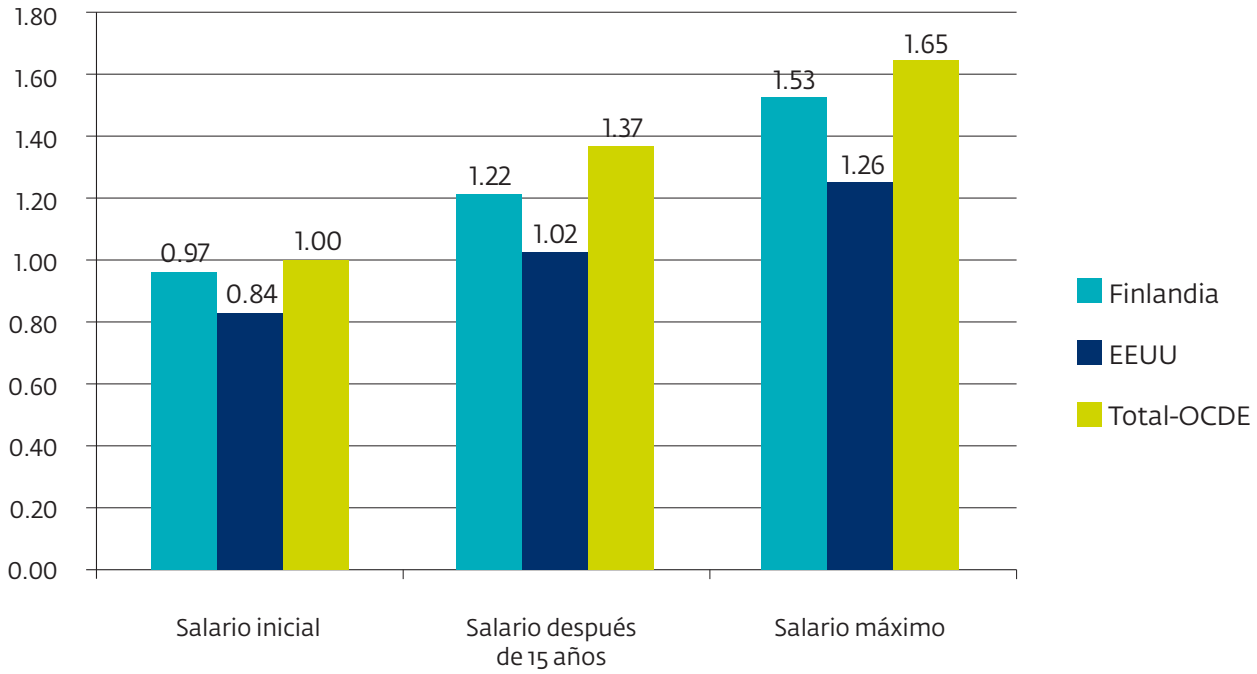
Tabla 1. Evaluación PISA. 2009.

Para los fines del presente documento, resulta útil hacer una breve revisión de los sistemas educativos de algunos de estos países, en particular de la República de Corea, Finlandia, Chile y Brasil, con respecto a la formación de profesores y a factores que podrían afectar el desempeño de los estudiantes, como la equidad y la efectividad de los recursos.

Con respecto a la formación de profesores en los países mencionados, para ser profesor en cualquier área del conocimiento en niveles básico y medio (por lo menos desde preescolar hasta bachillerato) es necesario cursar una carrera universitaria en la enseñanza de la materia.

Además de que la profesión de maestro tiene muy buena reputación y es muy respetada. Por ejemplo, en Finlandia todos los profesores, sin importar el nivel de enseñanza, deben cumplir con el requisito de tener un grado de maestría; para la obtención del grado es necesario que hagan una disertación basada en un trabajo de investigación. La formación de profesores en Finlandia recae en las universidades y es completamente independiente del gobierno (http://ftts.fi/).

En la Gráfica 1.1. se muestran los salarios que perciben los docentes de secundaria (Lower Secondary Education) de Finlandia en comparación con los de Estados Unidos y el promedio de los países de la OCDE.



Gráfica 1.1.

El siguiente extracto fue traducido de la página http://www.ncee.org/programs-affiliates/center-on-international-education-benchmarking/top-performing-countries/finland-overview/finland-teacher-and-principal-quality/:

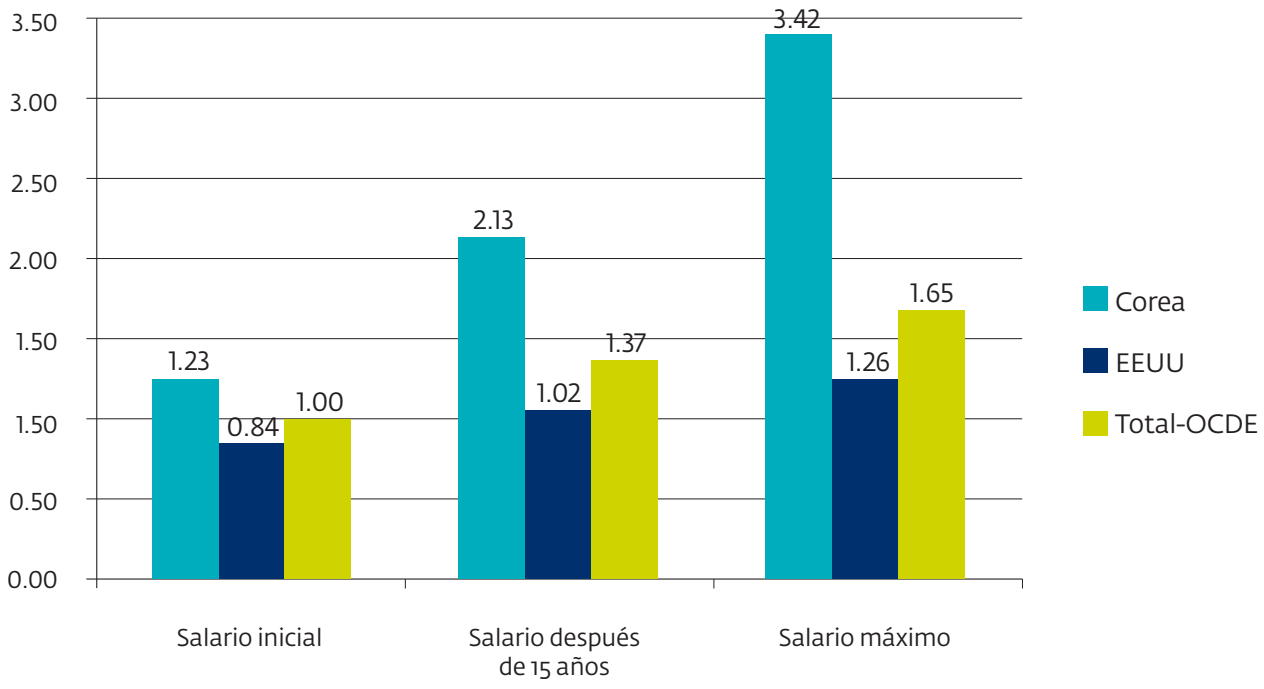
Los programas finlandeses de educación docente son extremadamente selectivos, admiten sólo a uno de cada 10 aspirantes. Los aspirantes son evaluados con respecto a su desempeño en el nivel medio superior, sus actividades extracurriculares y sus resultados en el Examen de Matriculación (que se hace al final del Bachillerato). Cuando un aspirante pasa este primer filtro, entonces es observado en una actividad de ense-

ñanza y se le hace una entrevista; son admitidos sólo aquellos que poseen una clara aptitud para la enseñanza, además de un fuerte desempeño académico.

En la República de Corea, la profesión de profesor también cuenta con una buena reputación y es ampliamente respetada. Para ser profesor, incluso por horas o de tiempo parcial, se requiere tener el certificado de enseñanza y su obtención no es fácil. Se selecciona a los mejores estudiantes para que estudien docencia en educación básica, lo que garantiza que los mejores profesores están en ese nivel. A diferencia de Finlandia, sólo es requisito tener grado de licenciatura, pero la carga de materias de pedagogía y de práctica docente es grande. (Tomado de: http://www.ncee.org/programs-affiliates/center-on-international-education-benchmarking/top-performing-countries/south-korea-overview/south-korea-teacher-and-principal-quality/)

Algo a destacar en cuanto a la formación de profesores en Corea es la formación de directores y subdirectores de escuelas: *La formación se divide en cinco categorías: docencia, directores y subdirectores, instructores profesionales, especialistas en TIC y profesores ejemplares.* (Tomado de http://www.unescobkk.org/education/ict/themes/training-of-teachers/overview/south-korea/)

En la Gráfica 1.2 se muestra la comparación de salarios de profesores de secundaria para Corea del Sur.



Gráfica 1.2. Comparación de salarios de Corea del Sur. Fuente: OCDE, 2008.

Tanto en Finlandia como en Corea se privilegia el trabajo colegiado entre los profesores y los futuros profesores. Sin embargo en Corea la percepción salarial es mucho más alta para profesores de secundaria.

El caso de Chile es interesante en el sentido de la dirección que han tomado las reformas educativas y las políticas de formación de profesores desde finales del siglo pasado. Una de las primeras medidas fue incrementar sustantivamente, aunque de manera gradual, el salario de los docentes; entre 1990 y 2008 el salario de un profesor de tiempo completo aumentó cerca de 200%. Parece ser que esta medida le dio un estatus diferente a la profesión y aumentó la demanda por estudios docentes entre la juventud chilena. Por ejemplo, en la primera década del presente siglo, la matrícula en las escuelas de licenciatura en pedagogía en educación básica aumentó en 180%. Este aumento en la percepción vino acompañado de un programa de fortalecimiento de la planta docente del país y de mejora de la formación continua de los profesores. Además de un proceso de certificación periódica que puede repercutir en la carrera magisterial e incluso en la recontratación de profesores (ya sean titulares o no). Otro aspecto a destacar es la creciente privatización de la educación. (se puede encontrar más información en las siguientes páginas: http://http://bicentenario.camara.cl/seminario/pdf/mesa%204%20-%20Gregory%20Elacqua.pdf, y http://www.revistaeducacion.cl/wp-content/uploads/2012/03/ANALISIS-PCPD-PRESENTADO-POR-EL-GOBIERNO1.pdf).

En Brasil, toda persona que quiera ser docente debe cursar una carrera universitaria en pedagogía (llamadas licenciaturas). Una de las críticas que se hace, por lo menos en la Licenciatura en matemáticas, es que el currículo está más cargado hacia materias propias de las matemáticas, descuidando la parte de la docencia. Se puede acceder a un cargo docente de tres maneras: por concurso de oposición (y consideraciones curriculares); por designación directa de una autoridad educativa o por una combinación de las dos anteriores. En el caso de Brasil, el salario de un profesor es muy variable, dependiendo de la institución y de sus certificaciones, pero en muchas instancias es inferior al salario mínimo. (En las siguientes páginas se pueden encontrar más detalles sobre el sistema educativo y la formación de profesores en Brasil http://www.oei.es/quipu/brasil/informe_docentes.pdf y http://www.rieoei.org/rie20a03.htm)

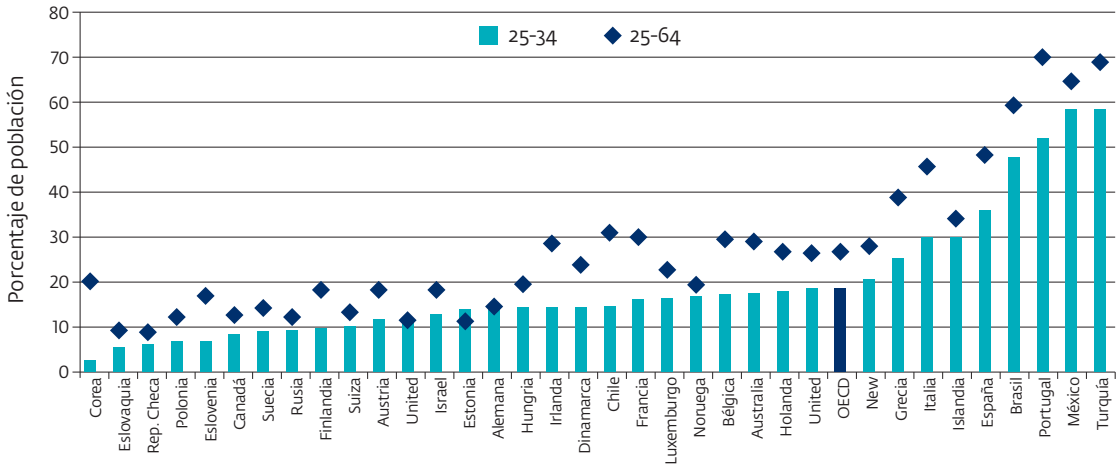
Sobre la equidad en la educación, la OCDE, a través de PISA, comenta lo siguiente (http://www.oecd.org/finland/36376641.pdf):

> ...la equidad en la educación es más que una cuestión de imparcialidad y de justicia. En el periodo actual, cuando muchos países tratan de desarrollar sus recursos humanos como un elemento para mejorar el crecimiento y la competitividad internacional, una educación inequitativa implica un desperdicio del potencial humano, implica que algunos individuos no tengan las competencias para desempeñarse bien en la sociedad moderna. Esto implica un problema tanto social como individual. Desde el punto de vista social, grandes cantidades de personas con educación deficiente son incapaces de contribuir a la prosperidad nacional y pueden generar costos sociales: ya sea de manera directa en la seguridad social o de manera indirecta en los problemas sociales. Desde la perspectiva individual, la falta de educación escolar y de competencias adquiridas en la escuela, por lo general lleva a percepciones monetarias menores, un nivel alto de desempleo y aspectos correlacionados con pobres condiciones económicas. (pp. 8-9)

La equidad en la educación se puede medir a través de varios factores, en particular podemos tomar en cuenta dos de ellos: porcentaje por intervalo de edad, de población que

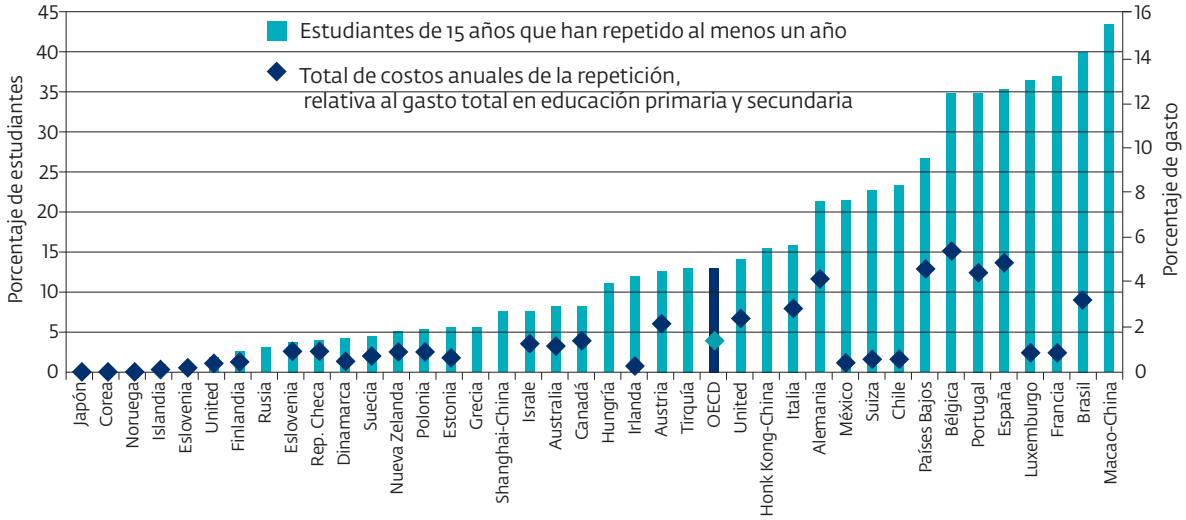
no han terminado el bachillerato (Upper Middle School) y porcentaje de estudiantes de 15 años que han repetido al menos un año.

En el informe de la OCDE (2012), *Equity and Quality in Education: Supporting Disadvantaged Studentsand Schools*, en la página 19 se presenta un gráfico en el cual se muestra el porcentaje de individuos de entre 25 y 34 años que no ha alcanzado el nivel medio superior o bachillerato. Por ejemplo, Corea tiene un 2% de individuos en esta situación, mientras que en Finlandia es un poco menor de 10%. En México sólo 42% de la población en este intervalo de edades ha logrado el nivel de Bachillerato. El promedio de los países pertenecientes a OCDE está en 81%.



Gráfica 1.3

Más adelante se presenta en un gráfico el porcentaje de estudiantes de 15 años que han repetido al menos un año. Por ejemplo, Finlandia tiene alrededor de 3% de estudiantes que han repetido al menos un año, y el costo con respecto al gasto total del sistema educativo es menor a 2%. En países como México el porcentaje de repetidores está cercano a 22%: en las consideraciones de OCDE se dice que los costos en nuestro país están subestimados, por lo que no se puede hacer una comparación del porcentaje de repetidores con respecto a los costos.



Gráfica 1.4

Lo que sí se puede decir es que cuanto más alto sea el porcentaje de repetidores, mayor será el costo educativo en el sistema. En nuestro país es muy socorrida la práctica de bajar el índice de reprobación de los estudiantes (sobre todo en nivel secundaria) relajando los mecanismos de acreditación. Esta práctica también contribuye a la inequidad pues al pasar al grado siguiente a un estudiante, sin tener el conocimiento ni las habilidades suficientes, mayor será el riesgo de reprobación. En conclusión, después de este somero análisis, parece ser que en los países con un buen programa nacional de formación de profesores, un alto reconocimiento de la profesión docente por la sociedad, programas periódicos de certificación de la docencia y un alto grado de equidad educativa son factores que influyen en el buen desempeño escolar de los estudiantes.

1.2 Contexto nacional

En los últimos años, nuestro país ha tenido varias reformas educativas en los niveles básico y medio superior. Como es sabido, en ambos niveles la Secretaría de Educación Pública (SEP) adoptó la enseñanza por competencias. Otro hecho importante, que sin duda tendrá un efecto notable en la educación media, es la recientemente anunciada obligatoriedad de la Educación Media Superior.

Según el Acuerdo 592, en el cual se establece la Articulación de la Educación Básica, publicado en agosto de 2011 en el Diario Oficial de la Federación, los principios pedagógicos que sustentan el Plan de Estudios son los siguientes:

a) Centrar la atención en los estudiantes y en sus procesos de aprendizaje
b) Planificar para potenciar el aprendizaje
c) Generar ambientes de aprendizaje
d) Trabajar en colaboración para construir el aprendizaje
e) Poner énfasis en el desarrollo de competencias, el logro de los estándares curriculares y los aprendizajes esperados
f) Usar materiales educativos para favorecer el aprendizaje
g) Evaluar para aprender
h) Tutoría y asesoría en la escuela

Y se definen los aprendizajes esperados como indicadores de logro que, en términos de la temporalidad establecida en los Programas de Estudio, definen lo que se espera de cada alumno en **términos de saber, saber hacer y saber ser**; además, le dan concreción al trabajo docente al hacer constatable lo que los estudiantes logran y constituyen un referente para la planificación y la evaluación en el aula. Y también se especifica que **los aprendizajes esperados gradúan progresivamente los conocimientos, las habilidades, las actitudes y los valores que los alumnos deben alcanzar para acceder a conocimientos cada vez más complejos**, al logro de los Estándares Curriculares y al desarrollo de competencias[1].

1 Definidas como, las habilidades, la pericia y las aptitudes de los estudiantes para analizar y resolver problemas, para manejar información y para enfrentar situaciones que se les presentarán en la vida adulta y que requerirán de tales habilidades. Tomado de http://www.oecd.org/pisa/39730818.pdf (12 de marzo de 2013)

Otro concepto que vale la pena resaltar es el de Evaluar para Aprender. Se dice que la evaluación de los aprendizajes es el proceso que permite obtener evidencias, elaborar juicios y brindar retroalimentación sobre los logros de aprendizaje de los alumnos a lo largo de su formación; por lo tanto, es parte constitutiva de la enseñanza y del aprendizaje.

Más adelante, en el mismo Acuerdo, se definen las siguientes competencias para la vida:

- El aprendizaje permanente
- El manejo de la información
- El manejo de situaciones
- La convivencia
- La vida en sociedad

Estas competencias sirven para concretar los principios pedagógicos del Plan de Estudio del Nivel Básico.

El currículo está organizado en campos de formación para la Educación Básica, de éstos se dice:

Los campos de formación para la Educación Básica organizan, regulan y articulan los espacios curriculares; tienen un carácter interactivo entre sí, y son congruentes con las competencias para la vida y los rasgos del perfil de egreso. Además, encauzan la temporalidad del currículo sin romper la naturaleza multidimensional de los propósitos del modelo educativo en su conjunto.

Los campos de formación son: Lenguaje y comunicación; pensamiento matemático; exploración y comprensión del mundo natural y social; y desarrollo personal y para la convivencia.

Con respecto a Pensamiento matemático, en el Acuerdo 592 se dice:

El campo Pensamiento matemático articula y organiza el tránsito de la aritmética y la geometría y de la interpretación de información y procesos de medición, al lenguaje algebraico; del razonamiento intuitivo al deductivo y de la búsqueda de información a los recursos que se utilizan para presentarla.

El conocimiento de reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones sólo es importante en la medida en que los alumnos puedan utilizarlo de manera flexible para solucionar problemas. De ahí que los procesos de estudio van de lo informal a lo convencional, tanto en términos de lenguaje como de representaciones y procedimientos. La actividad intelectual fundamental en estos procesos se apoya más en el razonamiento que en la memorización.

El énfasis de este campo se plantea con base en la solución de problemas, en la formulación de argumentos para explicar sus resultados y en el diseño de estrategias y sus procesos para la toma de decisiones. En síntesis, se trata de pasar de la aplicación mecánica de un algoritmo a la representación algebraica.

Como ejemplo del carácter interactivo de los campos entre sí, es significativo lo que se dice en el campo de exploración y comprensión del mundo natural y social en el nivel preescolar:

> *En preescolar, el campo formativo se centra en el desarrollo del pensamiento reflexivo y busca que los niños pongan en práctica la observación, formulación de preguntas, resolución de problemas, así como la elaboración de explicaciones, inferencias y argumentos sustentados en las experiencias directas; en la observación y el análisis de los fenómenos y procesos perceptibles que les ayudan a avanzar y construir nuevos aprendizajes sobre la base de los conocimientos que poseen y de la nueva información que incorporan.*

Esto es, se plantea reforzar la parte del razonamiento lógico-deductivo del pensamiento matemático con la formación de inferencias y su validación en campos diferentes al del Pensamiento matemático.

Por su parte, en el Nivel Medio Superior (SEP, 2011) se tienen las siguientes competencias genéricas (comunes a todas las áreas y las materias)

- Autodeterminación y cuidado de sí
- Expresión y comunicación
- Pensamiento crítico y reflexivo
- Aprendizaje de forma autónoma
- Trabajo en forma colaborativa
- Participación con responsabilidad social

El alumno que egresa de la Educación Media Superior debe ser analítico, creativo, crítico, informado, comunicador, autónomo, reflexivo, responsable, cooperativo, tolerante, solidario, sistemático y trabajador.

Se dice que *el entorno educativo debe ser un laboratorio en permanente actividad y no continuar con entornos estáticos y pasivos. Se sugiere utilizar la informática y la lúdica como apoyo, variar la metodología, no saturar el currículo con contenidos no significativos, dar tiempo al estudiante para que logre adquirir el conocimiento, dar más importancia al aprendizaje que a la nota, tomar el error como oportunidad de aprendizaje, generar ambientes de cooperación y no de rivalidades, usar problemas reales como material de trabajo, hacer trabajo en equipo, promover pláticas magistrales de temas puntuales, utilizar métodos de enseñanza en espiral donde se vuelve varias veces a los mismos temas, entre otras estrategias metodológicas que promuevan el enfoque educativo basado en el desarrollo de competencias.*

Las competencias disciplinares de matemáticas son (SEP Acuerdo 486, 2009):

1. *Construir e interpretar modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.*

2. *Formular y resolver problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.*
3. *Explicar e interpretar los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y contrastar con modelos establecidos o situaciones reales.*
4. *Argumentar la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.*
5. *Analizar las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.*
6. *Cuantificar, representar y contrastar experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.*
7. *Elegir un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno y argumentar su pertinencia.*
8. *Interpretar tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.*

Los planteamientos educativos de la SEP, en cuanto a la enseñanza de las matemáticas, están dentro de los estándares internacionales y, puesto que datan de 2011, aún no se tienen resultados de su implantación. En la prueba ENLACE de 2009, la mayoría de los estados obtuvieron resultados por debajo de los 500 puntos y sólo 11 presentaron puntajes ligeramente arriba de 500. En el 2012 se notó un avance ya que todos estuvieron por arriba de los 500 puntos, aunque sólo 5 lograron calificaciones arriba de 600. En el 2013 el aumento en porcentaje se sigue dando, 583.5 en Primaria y 536.3 en Secundaria, lo cual arroja una cierta esperanza en que hay avances.

La propuesta educativa matemática en los niveles básico y medio superior de la SEP es ambiciosa y está bien sustentada. No obstante, el tener un buen currículo de matemáticas no garantiza el buen aprendizaje de la disciplina, para ello es necesario contar con un buen programa de formación y actualización de profesores, políticas de acceso a la carrera docente justas y transparentes, apoyos académicos y financieros suficientes para el buen desempeño de la labor docente y profesores comprometidos realmente con la educación de los estudiantes.

Este es el reto que la UNAM, a través del SUMEM, asume como suyo: determinar las orientaciones curriculares de los aprendizajes matemáticos, iniciando con su Bachillerato; definir las principales características de un programa de formación y actualización de profesores, y establecer algunas políticas y acciones encaminadas al fomento de una Cultura Matemática en estudiantes, padres de familia, profesores y población en general.

Capítulo 2

Consideraciones para mejorar la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato de la UNAM

Capítulo 2
Consideraciones para mejorar la enseñanza de las matemáticas en el Bachillerato de la UNAM

Las matemáticas son parte fundamental de la cultura y en consecuencia permean toda actividad humana. En el Bachillerato de la UNAM se deben desarrollar en el estudiante aquellos aspectos fundamentales de la Cultura Matemática que le permitirán desempeñarse de manera satisfactoria tanto en sus estudios de bachillerato como en los superiores; además de darle el conocimiento suficiente para poder aplicar las matemáticas en situaciones ajenas al quehacer escolar y reconocerla como parte de su vida.

A tales aspectos fundamentales los llamamos Cultura Matemática y se conforma de:

- El desarrollo del **pensamiento matemático** y del **razonamiento lógico-deductivo**.
- La comprensión de los **conceptos matemáticos fundamentales** (aritméticos, algebraicos, geométricos, probabilísticos y de cálculo).
- **Reconocimiento de los factores que inciden** en el desarrollo de las **matemáticas.**
- El desarrollo de habilidades para la **resolución de problemas** dentro y fuera del ámbito matemático.
- Destreza en el **uso de las herramientas tecnológicas** para facilitar la resolución de problemas y la adquisición de conocimiento.
- **Fomento de valores** (como responsabilidad, respeto, tolerancia, cooperación y solidaridad) que apoyen el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática (de hecho de cualquier disciplina) y la investigación.

Los profesores son parte importante de la promoción de la Cultura Matemática. Otro elemento fundamental es el currículo, el cual contiene los aprendizajes esperados, la temática con la cual se van a lograr tales aprendizajes y las sugerencias de evaluación formativa (véanse capítulos 3, 4 y 6).

En la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato es conveniente considerar los siguientes aspectos: *los conceptos de las matemáticas deben comprenderse tanto como expresión rigurosa de fenómenos naturales y sociales, como por sí mismos.* Si es el caso, *sería pertinente sacrificar la extensión de los contenidos en aras de un conocimiento particular más profundo*. Para esto, se recomienda que el estudiante ejercite su razonamiento abstrac-

to con capacidad deductiva, por lo que será conveniente *acercarlo a la experiencia de la demostración matemática, si bien no formal pero si rigurosa desde el punto de vista lógico*.

Los planteamientos que se presentan en este documento parten de algunas consideraciones generales, que más que responder a una postura teórica particular surgieron del trabajo de los equipos del GTMEM y de la consideración de experiencias en los ámbitos nacional e internacional.

Para el desarrollo de la Cultura Matemática es conveniente tomar en cuenta los siguientes puntos:

- Caracterizar el aprendizaje como el proceso que lleva a la apropiación del conocimiento y a la adquisición de habilidades respecto a cierta rama del saber humano, posibilitándolo mediante conocimientos previos, práctica y descubrimiento. El aprendizaje implica también un cambio de actitudes en relación con el objeto del conocimiento y una valoración diferente del mismo.
- Concebir al aprendizaje escolar como resultado de acciones intencionadas, encaminadas al logro de objetivos definidos. En el Bachillerato, el aprendizaje es producto de una acción premeditada de todos los participantes en el proceso: estudiantes, profesores, administrativos y padres de familia.
- Centrar la atención en los estudiantes y en su proceso de aprendizaje. Esto implica un conocimiento detallado de estrategias de aprendizaje y de los conocimientos previos del estudiante con el fin de diseñar las actividades adecuadas para optimizar su desempeño escolar; tal conocimiento se puede lograr a través del concepto de evaluación formativa o evaluación en el aula, encaminada a mejorar el desempeño tanto de profesores como de estudiantes.
- Definir los aprendizajes esperados como indicadores de logro de la concreción del trabajo docente. Esto hace comprobable lo que el estudiante aprende y constituye un referente para la planificación y la evaluación en el aula.
- Incluir situaciones de la vida cotidiana fuera del aula, adaptándolas a los requerimientos de la materia; esto es darles una intención didáctica y problematizarlas para promover la aplicación de los contenidos temáticos en ámbitos externos al salón de clases, con fines tanto didácticos como motivacionales.
- Propiciar el trabajo en equipo para favorecer la puesta en marcha de habilidades de comunicación, formulación, acción y validación. En particular, los patrones de validación forman parte esencial de la argumentación y llevan, eventualmente, a la demostración matemática.
- Introducir al aula el uso de herramientas que ayuden al desarrollo y a la manifestación de conocimientos, como software dinámico, tecnología CAS y TIC, entre otros.
- Considerar la evaluación como un proceso permanente en la enseñanza, para obtener evidencias, elaborar juicios y brindar retroalimentación sobre los logros de aprendizaje de los alumnos a lo largo de su formación.

Las matemáticas pueden entenderse como un cuerpo de conocimiento sobre entes abstractos como números, figuras geométricas y símbolos. Las matemáticas puede fungir como:

- Ciencia que hace una explicación de la realidad a través de la abstracción (matematización) de los fenómenos bajo estudio.
- Herramienta que sirve para plantear y resolver problemas de la matemática misma y de otros ámbitos del conocimiento.
- Disciplina que estudia los entes abstractos por sí mismos sin buscarles conexión alguna con la realidad.
- Lenguaje que sirve para expresar y comunicar ideas sobre entes abstractos y sus relaciones entre sí.

Para abordar el desarrollo de la Cultura Matemática dividimos sus elementos en dos categorías: **contenidos y aprendizajes.** En contenido y aprendizaje se incluye el desarrollo del pensamiento matemático, el entendimiento de los conceptos fundamentales de las matemáticas y el reconocimiento de los factores que inciden en el desarrollo de las matemáticas. En los **procesos de enseñanza-aprendizaje** se engloban el desarrollo de procesos heurísticos y del razonamiento lógico-deductivo e igualmente el uso y desarrollo de tecnología.

Lo anterior en un ambiente de fomento de valores que redunden en un mejor desempeño en el entorno escolar y social.

2.1 Contenidos y aprendizajes

El pensamiento matemático permite al estudiante reconocer patrones y generalizar; justificar resultados mediante argumentos matemáticos, y utilizar las distintas representaciones de un mismo objeto matemático, entre otras cosas. Para su tratamiento a nivel de bachillerato se sugiere dividirlo en:

Pensamiento numérico que implica la comprensión de los números reales y complejos, su representación y los procesos de aproximación.

Pensamiento geométrico que implica una percepción espacial de los objetos que nos rodean y con los cuales se está en contacto de manera constante.

Pensamiento algebraico que implica el entendimiento de los proceso de generalización, de razonamiento simbólico.

Pensamiento probabilístico que implica la comprensión de los procesos azarosos.

Pensamiento funcional que implica el entendimiento de las relaciones funcionales, los procesos de aproximación y de variación.

El desarrollo del pensamiento matemático en los términos descritos viene aparejado con el aprendizaje de los conceptos fundamentales de las matemáticas que, en la actualidad, están distribuidos en las ramas tradicionales de la disciplina: aritmética, álgebra, estadística, probabilidad, geometría, geometría analítica, trigonometría y cálculo.

Finalmente, consideramos importante conocer las fuentes de desarrollo de las matemáticas que pueden ser históricas, conceptuales y prácticas, lo cual daría una visión unificadora de las matemáticas como cuerpo de conocimiento.

2.2 Procesos de enseñanza-aprendizaje

Se considera relevante abordar la enseñanza de las matemáticas en tres aspectos que no están desvinculados entre sí: el desarrollo de heurísticas personales durante la resolución de problemas dentro y fuera del ámbito matemático; la formulación de argumentos para explicar y validar resultados; la capacidad de ejecutar correctamente las operaciones y los algoritmos propios de las matemáticas; y utilizar la tecnología disponible como apoyo en la comprensión de los contenidos matemáticos.

Las actividades de resolución de problemas son el vehículo ideal para el desarrollo de heurísticas. En un principio podemos dividir los problemas en tres tipos:

- Problemas de exploración, formulación y validación de conjeturas
- Problemas de modelación matemática
- Problemas no rutinarios

Asimismo, en la resolución de problemas de cualquier tipo es importante la aplicación correcta y flexible de reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones.

Con respecto a la formulación de argumentos y su validación, fomentar esta capacidad en los estudiantes apunta hacia el desarrollo de su razonamiento lógico-deductivo y le da la posibilidad de acceder con éxito a la demostración matemática, que es la esencia misma de la solidez y de la atemporalidad de las matemáticas, y que además puede ser un vehículo hacia una satisfacción personal para quien la realiza y para promover el aprecio por la belleza de la perfección matemática.

No se trata de considerar la demostración matemática como un contenido puntual, sino como una forma de establecer la validez de conjeturas que el estudiante puede, una vez validadas, utilizar para justificar otros resultados y otras conjeturas.

Parte esencial de los procesos de aprendizaje es el uso de herramientas, en particular aquellas que facilitan el desarrollo matemático (como los Sistemas de Álgebra Computarizada), la manipulación de objetos matemáticos (como el software de Matemática Dinámica) y las que facilitan la comunicación y el manejo de datos.

Consideramos que un aspecto importante de la Cultura Matemática es tener una actitud positiva hacia la materia, la cual le dé al individuo la voluntad para perseverar en una tarea matemática hasta su conclusión.

2.3 Valores y actitudes

Con respecto a los valores y las actitudes, definimos tres categorías:

- Aquellos relacionados con el comportamiento escolar que comprenden desde la disposición y el interés por aprender, hasta el compromiso por cumplir con obligaciones académicas y mantener esa disposición durante un ciclo escolar completo; por ejemplo, disposición para trabajar en equipo, cuidado del patrimonio escolar, interés por realizar tareas y por desarrollar trabajos de investigación.

- Las actitudes y los valores derivados de cada disciplina, tomando en cuenta su enfoque, sus aprendizajes, y el modelo en el que se insertan; por ejemplo, el pensamiento crítico, la disposición para el análisis y la reflexión, el interés por saber y aplicar los conocimientos para resolver problemas.
- Las actitudes y valores morales que son observables dentro y fuera del salón de clase, así como la disposición que tenemos para relacionarnos unos con otros; por ejemplo, no dañar, no ofender o no maltratar a los demás, actuar con honestidad, cuidar el medio ambiente y los recursos naturales, decidir con autonomía y responsabilidad.

En el caso del bachillerato universitario, se puede hablar de la importancia de fomentar la pluralidad y la laicidad de los valores con el fin de salvaguardar la autonomía y la convivencia social, propiciando actitudes como escuchar, dialogar, argumentar, reflexionar, empatizar y mostrar apertura hacia las diferencias. Se trata de aceptar que algunas diferencias de grupo o personales, basadas en diversas concepciones del mundo, o bien derivadas de teorías o enfoques distintos, tengan cabida en una sociedad democrática y tolerante.

Desde nuestra perspectiva, la formación de actitudes y de valores universitarios implica la concatenación de los contenidos de aprendizaje de la planeación docente y de las actitudes que el profesor manifiesta en el transcurso de un ciclo; es decir, unifica y da consistencia a todos los demás aspectos de la Cultura Matemática.

Capítulo 3

Estándares disciplinarios

Capítulo 3
Estándares disciplinarios

Los estándares que se presentan en este libro son una descripción de los conocimientos, las actitudes y las habilidades (entendidas estas dos últimas como la capacidad para operar competentemente y tener la disposición para hacerlo) matemáticas que el Grupo de Trabajo para Mejorar la Educación Matemática (GTMEM) desea que dominen los egresados del bachillerato de la UNAM.

Este capítulo aborda:

- **Conocimientos, destrezas, actitudes y valores.** Los estándares parten de los conocimientos y las destrezas englobados en el concepto de competencias para la vida definidas por la UNESCO[2] y adoptadas en casi todo el mundo como guía para los sistemas educativos en cada región y en cada país. Cabe aclarar, sin embargo, que el enfoque que proponemos es diferente de la idea de "enseñanza por competencias" que se usa en los planes de estudio de muchas instituciones nacionales.
- **Principios.** Se presentan de manera algo más detallada los principios que han guiado la definición de estos estándares, y se explica por qué se recurre a listas de problemas típicos para dar precisión a su significado, en lugar de limitarse a exponer una lista de indicadores u objetivos de aprendizaje.
- **Estándares por área.** Finalmente se muestra una organización de las áreas de las matemáticas que se cubren en el bachillerato, incluyendo una descripción de las habilidades específicas que cada una de ellas promueve en el estudiante y su conexión con la Cultura Matemática adoptada por el SUMEM, y se da una lista breve de los aprendizajes esperados de cada una, ilustrada en el siguiente capítulo con ejemplos de problemas que determinan en su conjunto el nivel de conocimientos, habilidades, actitudes y valores que el egresado de bachillerato debe tener respecto a cada una de estas áreas.

Cabe mencionar que los problemas de ejemplo del siguiente capítulo cubren diversos niveles, en particular, se encuentran problemas que todo egresado del bachillerato debe saber enfrentar y resolver; es decir, definen el estándar mínimo de egreso del bachillerato. Por otro lado, también se contemplan problemas que conviene que los estudiantes, que desean ingre-

2 ICT Transforming education: A regional guide. UNESCO 2010. ISBN 978-92-9223-326-6.

sar a una carrera con requerimientos especiales de matemáticas, puedan enfrentar y resolver, y otros que el profesor puede utilizar para motivar ciertos temas o profundizar en ellos.

3.1 Conocimientos, destrezas, actitudes y valores

Para nosotros, ser competente significa poseer conocimientos, destrezas, actitudes y valores que la sociedad actual utiliza y que son resultado de siglos de civilización. La persona competente no sólo debe poseer conocimientos y destrezas sino que además debe tener la voluntad y la capacidad para movilizarlos hacia un fin. Es decir, debe tener la convicción de que el acervo cultural, científico y tecnológico que ha heredado y del cual se ha apropiado, puede ayudarle a enfrentar las situaciones que se le presenten tanto de manera individual como colectiva. En otras palabras, ser competente significa ser capaz de enfrentar la vida aprovechando todo el bagaje cultural que la sociedad actual ofrece para beneficio propio y de su entorno.

Las competencias para la vida, según la UNESCO, se clasifican en los siguientes rubros:

- aprendizaje permanente.
- manejo de información.
- manejo de situaciones y convivencia.

La formación matemática puede y debe contribuir al desarrollo de todas estas competencias y por ello la enseñanza de las matemáticas no debe plantearse como un apartado cerrado y distante del resto del desarrollo humano, sino como parte integral del mismo. Esto quiere decir que el ciudadano debe tener una idea clara de por qué se enseñan las matemáticas, de cuál es la importancia de estos conocimientos, tanto en relación con la cultura en general como respecto a la ciencia y la tecnología, sobre las cuales descansa hoy en día una buena parte del bienestar de la sociedad.

Competencia matemática. Es la capacidad para interpretar ciertas situaciones de la vida real (pueden ser fenómenos naturales, económicos, sociales, médicos, etc. que involucren manejo de datos y variables) y poder plantearlas como problemas matemáticos, mediante la utilización del lenguaje y los conceptos apropiados, para entonces resolver tales problemas utilizando herramientas, métodos y razonamientos adecuados. La competencia matemática conlleva tener suficiente familiaridad con los conceptos y la solidez de la estructura y razonamiento matemático.

3.2 Principios que guían los estándares

¿Por qué aprender matemáticas? En la actualidad muchas personas no tienen una idea clara de por qué se estudian las matemáticas en la escuela ni para qué sirven. A menudo no se sabe por qué es importante entender las matemáticas, dado que mucho de lo que se enseña probablemente no se utiliza en la vida cotidiana. Hay respuestas claras a estos cuestionamientos que es pertinente dejar asentadas en este documento.

1. **Las matemáticas son cultura.** La ciencia en general y las matemáticas en particular, son el destilado de siglos de investigación y desarrollo por parte de nuestros antepasados y constituyen uno de los bienes más preciados y útiles de la humanidad. Es responsabilidad de todas las generaciones recibir, conservar, utilizar, incrementar y transmitir este bien excepcional y exclusivo del ser humano en el que está cimentado el bienestar actual y el futuro de la humanidad.
2. **La matemáticas son muy útiles.** Las matemáticas han sido el lenguaje especializado que la ciencia ha requerido para la gran mayoría de sus avances; por ejemplo, la astronomía y la física son inconcebibles sin ella. Igualmente, casi todo instrumento tecnológico, ya sea en su diseño o en su funcionamiento, aprovecha el conocimiento matemático acumulado durante muchas generaciones. Las computadoras y los dispositivos de comunicación, tan extendidos en la actualidad y tan necesarios para la vida moderna y futura, utilizan muchos conceptos, modelos y desarrollos matemáticos. Incluso la industria del entretenimiento, tan dominante en la vida moderna, utiliza gran cantidad de conceptos y métodos matemáticos para generar animaciones y efectos especiales en películas y video-juegos.
3. **Las matemáticas entrenan la mente.** El entrenamiento en los distintos aspectos del pensamiento matemático produce una gran fuerza intelectual en el individuo, le da confianza en sí mismo y lo prepara para enfrentar con el intelecto problemas de todo tipo, aún aquellos que no tengan un aspecto matemático evidente o relevante. Su estudio propicia el pensamiento abstracto y lógico; el reconocimiento de patrones y analogías; asimismo, fortalece la búsqueda de estrategias para la solución de problemas.

Tales hechos constituyen las razones fundamentales por las que los bachilleres de la UNAM, que deben ser ciudadanos competentes y ejemplares, aprendan matemáticas y la aprendan bien. La UNAM, a través del SUMEM, ha tomado la decisión de impulsar y mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas como una responsabilidad ineludible con el país y hacia la sociedad.

Desde nuestra perspectiva, aprender matemáticas significa conocer y entender el lenguaje, los conceptos y los algoritmos o métodos de éstas; significa desarrollar habilidades para aplicar tales métodos y algoritmos y, en especial, significa saber utilizarlos para plantear problemas y resolverlos.

En consecuencia, al egresado del bachillerato se le pide no sólo ser capaz de resolver algunos problemas traduciéndolos de un lenguaje informal al lenguaje matemático y aplicando los métodos de solución adecuados, sino también ser capaz de plantearse problemas él mismo, de reconocer, en ciertas situaciones de la vida real, la conveniencia de plantearlas en forma matemática, de recopilar la información necesaria para convertir tales situaciones en problemas matemáticos, de resolverlos y de interpretar las soluciones en el contexto que generó el problema.

Por ello, no basta simplemente un enfoque de *resolución de problemas* sino que se requiere un manejo de situaciones problemáticas en las que no sólo se trate de entender y resolver un problema sino de plantearlo, de refinarlo, de generalizarlo y de evaluar los diferentes planteamientos posibles. Además, el estudiante debe ser capaz de integrar sus

conocimientos y reconocer la unidad de las matemáticas. En suma, se busca que el egresado del bachillerato sea capaz de movilizar los conocimientos, las habilidades y las actitudes matemáticas que ha adquirido, para lograr una mayor objetividad y generalidad en la solución de los problemas a los que se enfrenta. En esta dirección, es conveniente impulsar el uso de la tecnología (como la hoja de cálculo, software de geometría y estadística dinámica, instrumentos eléctricos, electrónicos y mecánicos, multimedia, entre otros) ya que juegan un papel importante para:

- *comprender patrones, relaciones y funciones.*
- *representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos.*
- *construir y usar modelos matemáticos de diversos fenómenos.*
- *analizar el cambio en contextos diferentes* (NCTM, 2003, p.39).

Para evaluar el aprendizaje de las matemáticas es necesario especificar los conceptos y las habilidades que el estudiante debe desarrollar; ejemplificar el tipo de situaciones o problemas que debe ser capaz de enfrentar. Por tanto, se presentan los estándares con listas de contenidos y habilidades referentes a cada área y listas de problemas o situaciones problemáticas que ilustran la capacidad de utilización de los conocimientos adquiridos y el nivel de profundidad esperado.

Estándares por área. Los estándares que se presentan en los siguientes apartados de este documento especifican con mayor detalle lo expuesto en los párrafos anteriores. Primero, con respecto a la competencia matemática en general y luego en relación a cada una de las áreas de las matemáticas que deben cubrirse en el bachillerato.

Competencia matemática en el bachillerato. Como se mencionó, la competencia matemática consiste en la capacidad de movilizar los conocimientos y habilidades matemáticas que el individuo posee, para enfrentar racionalmente las situaciones problemáticas que se le presenten. En el nivel de bachillerato, esta capacidad debe incluir la voluntad de aprender nuevos conceptos y desarrollar nuevas habilidades matemáticas que pudieran ser necesarias para enfrentar alguna situación específica más complicada.

La competencia matemática del bachillerato incluye las actitudes y los valores que impulsan al individuo a pensar racionalmente y a buscar el camino para analizar situaciones y problemas de su interés, así como problemas de la sociedad y su entorno, con el objeto de comprenderlos y, si es posible, definir planteamientos matemáticos que los representen y le permitan utilizar métodos matemáticos para analizarlos. En otras palabras, el estudiante debe saber que muchas situaciones de la vida real son susceptibles de representarse matemáticamente, debe conocer las ventajas de tales representaciones y debe sentirse impulsado a buscarlas activamente.

El desarrollo de esta competencia requiere de presentar al estudiante una amplia variedad de situaciones problemáticas concretas y ponerlo a analizarlas y resolverlas, como las que se especifican en las secciones posteriores de este documento. Pero también requiere de una convicción de la importancia histórica, cultural y estratégica de las matemáticas y un conocimiento profundo del papel que han jugado en el desarrollo

de la civilización. Es decir, es necesario que el estudiante tenga plena conciencia de la importancia de las matemáticas, así como de la gran cantidad de aplicaciones que ésta tiene. Es importante que sepa que casi cualquier área del conocimiento científico, tanto en las ciencias naturales como en las sociales, y en cualquier campo de la tecnología, las matemáticas juegan un papel vital e insustituible y que, por tanto, conviene que conozca tanto de ella como sea posible pues es muy probable que cualquiera que sea su campo de trabajo en el futuro, le resulte conveniente o incluso necesario recurrir a ella.

Entre los conocimientos y los contenidos matemáticos que consideramos que deben ser parte de la Cultura Matemática de un egresado del bachillerato, se encuentran temas que podrían formar parte o no del programa de estudios, y que más bien están dirigidos a estimular la reflexión del docente acerca de la pertinencia de su aprendizaje. Generalmente, estos temas son extensiones de cuestiones tratadas en clase y pueden servir para ilustrar la unidad de las matemáticas, y fortalecer la habilidad de abstracción o la capacidad de generalización. El profesor los puede utilizar libremente de acuerdo con su criterio y con los intereses y los avances mostrados por sus estudiantes. Éste es el caso, por ejemplo, de algunos temas mencionados en los estándares de geometría.

3.3 Estándares para Números y Álgebra

La competencia ***numérica*** consiste en conocer los números, saber operar con ellos, ser capaz de aplicarlos para representar situaciones de la vida real en forma cuantitativa y poder resolverlas utilizando las operaciones adecuadas, así como tener una actitud positiva hacia el uso y la aplicación de la aritmética.

La competencia ***algebraica*** consiste en la capacidad y la voluntad de plantear relaciones algebraicas que representen situaciones de la vida real, ser capaz de manipularlas y de interpretar correctamente las soluciones obtenidas en el contexto en que fueron generadas. Esto requiere de una familiaridad con el uso de las literales para representar incógnitas, variables, parámetros y cantidades numéricas arbitrarias, y de saber que puede asignarles el nombre que desee. También incluye el reconocimiento de la fortaleza de los métodos algebraicos como herramienta para la resolución de problemas.

A continuación se detallan los conocimientos, las habilidades, actitudes y valores que se esperan de todos los egresados del bachillerato en torno a los Números y el Álgebra.

3.3.1 Uso y habilidad en el manejo de los números

- Conocer y distinguir los principales sistemas de números utilizados en la actualidad: los naturales, los enteros, los racionales, los irracionales, los reales y los complejos y tener una idea clara de por qué se estudian y para qué se utilizan, así como qué tipo de problemas dieron lugar a su construcción o descubrimiento.
- Conocer y contextualizar las operaciones elementales.
- Descubrir patrones numéricos.
- Realizar estimaciones razonables.
- Representar magnitudes mediante exponentes y raíces.

- Entender y operar con la notación decimal.
- Representar números racionales con notación decimal.
- Entender y operar con la notación científica.
- Conocer la notación de fracciones y saber operar con ella, en especial cuando se usa representando números racionales.
- Construir la representación gráfica de un número inconmensurable algebraico (por ejemplo, raíz cuadrada de 2, o la proporción áurea).
- Realizar operaciones con el sistema decimal, utilizando los algoritmos convencionales pero también estrategias especiales o incluso personales. Será deseable el que conozcan algunos otros sistemas como el binario, sexagesimal u otros en relación con situaciones de interés general.
- Aplicar la variación directa e inversamente proporcional para resolver problemas.
- Tener una actitud de exploración, búsqueda de diversos procedimientos de resolución, generación y puesta a prueba de hipótesis en el uso de los números para el planteamiento cuantitativo de situaciones diversas.
- Tener la capacidad de enfrentar situaciones problemáticas simples, susceptibles de ser planteadas en términos aritméticos y ser capaz de enunciar y resolver los problemas que en ellas se presentan, utilizando algoritmos y estrategias adecuadas.

3.3.2 Planteamiento algebraico de problemas

- Construir representaciones algebraicas de diversas situaciones descritas en palabras, tanto en forma escrita como verbal.
- Reconocer si la situación problemática, en su representación algebraica, es una ecuación, ya sea lineal o cuadrática o es un sistema de ecuaciones, o bien simplemente expresa relaciones funcionales, en cuyo caso deberá traducir dichas relaciones a expresiones algebraicas sin confundirlas con ecuaciones.
- Nombrar y distinguir literales, variables e incógnitas en una formulación matemática.

Podrá hacer lo anterior en diversos contextos, desde los concretos y cotidianos relacionados con dinero, medidas de distancia, área, volumen, peso, hasta los científicos en donde los términos usados pudieran no ser conocidos por él pero donde el planteamiento sea suficientemente explícito para lograr extraer una formulación matemática. Sin pasar por alto las situaciones geométricas, como las de la trigonometría, que son ricas en problemas algebraicos interesantes y con muchas aplicaciones en el mundo real.

3.3.3 Solución algebraica de problemas

- Traducir y resolver problemas descritos verbalmente a ecuaciones lineales, ecuaciones de segundo grado o sistemas de dos ecuaciones lineales o cuadráticas; todos con coeficientes constantes.
- Interpretar y evaluar las soluciones obtenidas en el contexto de la situación problemática que generó el planteamiento. *Debe ponerse énfasis en los problemas que surgen de consideraciones geométricas, trigonométricas o de otras disciplinas como la economía. Así, no es necesario esperar a que el alumno cubra temas de estos campos en otros cursos*

para plantear problemas de este tipo en el curso de Álgebra; al contrario, hacerlo le mostrará la interrelación que hay entre las distintas áreas del conocimiento.

- Transformar las representaciones algebraicas de una situación problemática sencilla, que lleve a ecuaciones de primer grado o segundo grado, a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, a otras equivalentes, mediante el adecuado uso de las operaciones aritméticas y algebraicas hasta obtener soluciones a los problemas planteados, cuando esto sea posible, o hasta dejar la representación algebraica suficientemente simplificada.
- Interpretar los planteamientos algebraicos correspondientes, con gráficas en el plano cartesiano y las soluciones como intersecciones de rectas o curvas.
- Hacer el planteamiento matemático de problemas de muy diversas áreas que lleven a ecuaciones o a sistemas de ecuaciones.
- Comprender la deducción de fórmulas para la solución de ecuaciones y aplicar éstas convenientemente.
- Recurrir a representaciones tabulares de los planteamientos algebraicos, sobre todo cuando no es posible encontrar soluciones explícitas de manera algebraica, interpretar el problema de manera numérica y buscar soluciones aproximadas.

3.3.4 Interpretación de los pasos intermedios y de las soluciones

- Reconstruir los significados asociados a las representaciones algebraicas y construir nuevos significados para algunas representaciones algebraicas comunes.
- Reconocer e interpretar los pasos hacia la solución algebraica de una situación problemática.
- Establecer y validar las soluciones a una situación problemática, sabiendo en particular si los valores negativos son o no una solución coherente al contexto del problema, o cuál es su significado, y lo mismo con las soluciones imaginarias o complejas.
- Generar ejemplos de situaciones concretas que puedan representarse a través de diversos planteamientos matemáticos o expresiones algebraicas, según sea el caso.

3.3.5 Comprensión de las relaciones funcionales

- Transitar entre las representaciones algebraicas y las gráficas interpretando correctamente el crecimiento, decrecimiento y valores extremos de las funciones lineales, cuadráticas, polinomiales y racionales.
- Distinguir e interpretar las diversas relaciones funcionales de crecimiento: proporcionalidad lineal o inversa, relación cuadrática, variación y crecimiento polinomial, racional.

3.3.6 Construcción y verificación de desarrollos algebraicos

- Construir un desarrollo algebraico para llegar a un fin.
- Verificar, en un desarrollo algebraico dado, los argumentos que justifican cada paso, o bien, encontrar los errores que pueda haber en él y dar argumentos que los exhiban.
- Distinguir entre un desarrollo algebraico ya hecho y uno que esté en proceso.
- Debe saber que la construcción de un desarrollo algebraico requiere de argumentos teleológicos, mientras que la verificación de un desarrollo algebraico terminado, requiere de un proceso deductivo lógico que lleva del planteamiento a la solución en una serie de pasos perfectamente rigurosos y justificables.

3.3.7 Razonamiento algebraico básico

- Deducir la fórmula general que permite resolver las ecuaciones de segundo grado y de asociar el discriminante con los tipos de solución.
- Aplicar los distintos métodos para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales, relacionándolos con la intersección de rectas en el plano cartesiano.
- Aplicar algunos productos notables utilizando manipulaciones algebraicas con variables generales para factorizar expresiones algebraicas.
- Manipular expresiones algebraicas complejas y de cualquier tamaño.
- Identificar un polinomio de grado n y realizar operaciones algebraicas con polinomios de cualquier grado.
- Justificar la existencia de los números negativos y complejos como una necesidad algebraica que permita considerar que todas las ecuaciones de segundo grado tienen solución, aunque a veces éstas sean imaginarias o complejas y que permita concebir la posibilidad de resolver cualquier ecuación polinomial, incluso cuando tenga coeficientes complejos.
- Operar y utilizar propiedades de los exponentes y los logaritmos para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
- Resolver inecuaciones lineales y cuadráticas con una incógnita utilizando la notación de intervalos y su representación de gráfica en recta numérica.

3.3.8 Manipulación algebraica avanzada

- Operar las expresiones algebraicas utilizando procedimientos especiales como: cancelar multiplicadores idénticos en el numerador y denominador, completar cuadrados, factorizar, agrupar términos, usar la fórmula cuadrática. Deberá ser capaz de hacer todo esto respetando la sintaxis del álgebra y utilizando como elementos de estos procedimientos y operaciones, no sólo números y literales sino también expresiones algebraicas completas.

3.3.9 Cultura algebraica

Los temas descritos a continuación se proponen como parte de la Cultura Matemática del estudiante. Se trata de que el alumno tenga un acercamiento a algunos de los puntos cruciales en el desarrollo del álgebra; no necesariamente que los entienda a fondo o los pueda utilizar. El propósito es que estos temas tan importantes en el álgebra formen parte de su cultura.

- Conocer las propiedades algebraicas (conmutatividad, distributividad, su cerradura o no ante las operaciones algebraicas, etc.) de los números naturales, enteros, fraccionarios, reales y complejos.
- Saber de la existencia de la relación entre los números complejos y transformaciones de semejanza en el plano cartesiano (tema relacionado con la Geometría).
- Conocer la existencia de fórmulas o procedimientos algebraicos para resolver ecuaciones de tercero y cuarto grado conocidos como las fórmulas de Cardano y Tartaglia (desarrolladas en el siglo XV con gran esfuerzo de sus descubridores, que en aquella época eran considerados secretos muy valiosos); y que en cambio no puede existir un método algebraico general para resolver ecuaciones de grado quinto o superior. Este

resultado es uno de los grandes logros de las matemáticas del siglo XIX en el que estuvieron involucrados grandes matemáticos como Gauss, Abel y Galois.

- Conocer la aportación de Gauss a la demostración de que todas las ecuaciones polinomiales tienen soluciones y que por lo general éstas serán números complejos.
- Conocer la existencia de los métodos numéricos como alternativa para encontrar aproximaciones de soluciones de ecuaciones algebraicas y no algebraicas (por ejemplo, x=tan(x))
- Conocer algunos sistemas de numeración y los algoritmos de operación que se han desarrollado a través del tiempo como logros fundamentales de la civilización, que han permitido al hombre cuantificar campos diversos del conocimiento.
- La existencia del álgebra como un campo de las matemáticas vivo y en crecimiento, el cual puede extenderse a otros objetos más abstractos como transformaciones, matrices (que son operadores en espacios vectoriales de dimensión finita, que tienen un álgebra que en general no es conmutativa) y operadores de otra índole, de esta manera se dará cuenta que el álgebra no se reduce al manejo de números y literales.
- Conocer los nombres, contribuciones y contexto problemático de los matemáticos más relevantes en la historia del álgebra como Al-Kwarizmi, Vieta (notación algebraica moderna), Cardano, Tartaglia y Scipione Dal Ferro (solución de las ecuaciones de tercero y cuarto grado), Euler (números complejos) Gauss, Abel y Galois (Teoría de las ecuaciones polinomiales), Hamilton (los cuaternios y octonios).

3.4 Estándares para Geometría

3.4.1 Elementos básicos de geometría Euclidiana en dos dimensiones

- Conocer las propiedades básicas de la geometría de rectas y ángulos, planos y polígonos, en particular el teorema de Tales, congruencia y semejanza de polígonos y su relación con las transformaciones de traslación, rotación y reflexión y dilatación; ser capaz de aplicar estos conocimientos para plantear y resolver problemas.
- Ser capaz de realizar las construcciones básicas con regla y compás como la bisectriz de un segmento, la tangente a una circunferencia desde un punto exterior, la circunferencia circunscrita a un triángulo, incluyendo construcciones geométricas que permitan realizar operaciones de multiplicación, división y extracción de la raíz cuadrada de segmentos dados.

3.4.2 El triángulo y su geometría

- Conocer el baricentro, el circuncentro, el ortocentro y el incentro como puntos de intersección de las medianas, las mediatrices, las alturas y las bisectrices, respectivamente.
- Conocer las propiedades de triángulos rectángulos, en particular el Teorema de Pitágoras, las razones trigonométricas, las identidades pitagóricas y su uso en el planteamiento y la resolución de problemas. Conocer y utilizar las leyes de senos y cosenos en la resolución de problemas.
- Ser capaz de aplicar los criterios de congruencia y semejanza en triángulos y la desigualdad del triángulo en la resolución de problemas.

- Ser capaz de utilizar estos conocimientos para comprender esquemas geométricos en los que aparecen triángulos y resolver problemas prácticos.

3.4.3 La geometría del círculo

- Conocer las propiedades geométricas del círculo: rectas y segmentos notables, ángulos internos y externos y segmentos de arco. Conocer las propiedades de los polígonos cíclicos, en particular los regulares.
- Ser capaz de utilizar el conocimiento de la geometría del círculo para plantear y justificar conjeturas y para plantear y resolver problemas.

3.4.4 Elementos básicos de geometría tridimensional

- Conocer y describir los cuerpos en tres dimensiones como el cubo, los prismas, las pirámides, los cilindros, los conos, la esfera, y los poliedros convexos regulares (platónicos).
- Ser capaz de identificar sus proyecciones ortogonales a los planos, identificar sus componentes, calcular sus superficies, plantear el problema y calcular su volumen mediante aproximaciones.

3.4.5 Las cónicas y sus representaciones

- Conocer la representación de puntos en el plano cartesiano y en coordenadas polares.
- Conocer las cónicas en sus diversas caracterizaciones, como intersecciones de un cono circular con un plano; lugares geométricos definidos a partir de sus focos o del foco y la directriz en el caso de la parábola y cómo lugares geométricos en los que la razón de la distancia al foco y a la directriz es constante. Conocer las propiedades de reflexión de las cónicas. Ser capaz de plantear y resolver problemas aprovechando sus propiedades.
- Conocer la relación entre las ecuaciones lineales y cuadráticas en dos variables con la recta y las cónicas.
- Ser capaz de resolver problemas geométricos que involucren cónicas y lugares geométricos.

3.4.6 Proyecciones y perspectivas

- Conocer y aplicar los principios básicos de proyecciones y perspectivas, resaltando su uso en diferentes ramas del conocimiento como en arquitectura, pintura, ingeniería, fotografía, geografía, entre otras. En este estándar se plantean actividades que den al estudiante una visión más amplia de la aplicación de los principios del dibujo técnico en áreas como las mencionadas, poniendo el énfasis en los conceptos geométricos involucrados y sus relaciones.
- Ser capaz de identificar los principios básicos de proyecciones y perspectiva en sus manifestaciones y de resolver problemas que los involucren.

3.4.7 Los vectores y su aplicación

- Conocer los vectores en el plano y la interpretación geométrica de sus operaciones. Los vectores en el espacio y la interpretación geométrica de sus operaciones; incluyendo el producto escalar y el producto vectorial.
- Ser capaz de utilizar vectores en el planteamiento la solución de problemas en dos y tres dimensiones.

3.4.8 Ecuaciones paramétricas

- Graficar representaciones paramétricas de algunas curvas en el plano y en el espacio, en particular las cónicas.

3.4.9 Ecuaciones cuadráticas en tres dimensiones

- Saber graficar en la computadora ecuaciones cuadráticas en tres variables y a partir de ello reconoce que representan superficies en el espacio (conos, cilindros, elipsoides, paraboloides e hiperboloides, en particular los de revolución)

3.4.10 Razonamiento deductivo y validación de conjeturas

- Ser capaz de utilizar su conocimiento geométrico (y matemático en general) para plantear conjeturas y buscar su validación, ya sea durante el proceso de resolución de problemas o para convencer a otros de la corrección de sus resultados o de sus aseveraciones. Entender la estructura axiomática de la geometría y de las matemáticas en general.

3.4.11 Cultura geométrica

- Conocer la importancia histórica del método axiomático y de los elementos de Euclides, así como de algunos de los logros teóricos de la Geometría griega.
- Conocer la definición clásica de las curvas cónicas, de su existencia en la naturaleza (el tiro parabólico, las órbitas planetarias y catenarias, entre otras) y de su aplicación en la tecnología actual.
- Entender el método de coordenadas para estudiar la geometría. Reconocer su influencia en el desarrollo de la ciencia y la tecnología (por ejemplo, la cuantificación de los fenómenos físicos, el cálculo de Newton y de Leibniz, el uso de los vectores en la física y la ingeniería y los espacios multidimensionales).
- Saber del descubrimiento de las geometrías no euclidianas en el siglo XIX.
- Aprecia la relación de la geometría con las artes plásticas en sus múltiples manifestaciones. En particular, manejar conceptos como simetría y proporción.

Estos son algunos de los temas de geometría que es deseable que formen parte de la Cultura Matemática del estudiante. No es necesario que los conozca a fondo, pero debe hacerse un esfuerzo para que no le sean desconocidos. Otros temas que el profesor puede abordar son la relación de la Geometría cartesiana (definida en términos de coordenadas) y la proyectiva con el fundamento matemático de la industria actual de los videojuegos, la animación y los efectos especiales y la geometría del universo como se le concibe a partir de la relatividad general de Einstein y la evolución histórica de esta concepción.

3.5 Estándares para funciones y cálculo

La enseñanza de las nociones básicas del cálculo debe ser parte de la cultura general del estudiante de bachillerato, ya que en el estudio de esta disciplina convergen todos los conocimientos de la matemática básica. Así encontramos que la geometría y el álgebra son tanto herramienta del cálculo, como objeto de estudio desde la perspectiva que ofrecen

las ideas de variación y aproximación. Por otra parte, es también cierto que los métodos del cálculo agregan una nueva forma de estudiar la naturaleza, no contemplada en los enfoques de la geometría y el álgebra. Por lo que una formación carente de esta visión sería incompleta dado que muchos problemas relevantes de la ciencia básica no pueden ser entendidos sin una buena comprensión del cálculo.

La competencia en cálculo consiste en comprender los procesos de aproximación y variación para modelar fenómenos y definir conceptos. También incluye la capacidad de analizar las relaciones funcionales entre las diversas variables que determinan el estado de un sistema, de estudiar la evolución del mismo, de generar conjeturas y generalizaciones. El estudiante puede lograr representaciones útiles de un proceso con ayuda de la computadora y utilizarla para obtener resultados cuantitativos. Es capaz de utilizar las aproximaciones cuantitativas para la toma de decisiones. En particular, debe conocer y comprender las funciones y los conceptos de derivada e integral.

A continuación se enumeran los conocimientos, habilidades, actitudes y valores que se esperan de todos los egresados del bachillerato en torno a los temas de funciones y cálculo.

3.5.1 Concepto de función

- Conocerá las funciones básicas reales de variable real como son las lineales, las cuadráticas y en general las polinomiales y las racionales, las trigonométricas, las exponenciales y las logarítmicas. Será capaz de analizar las gráficas de todas ellas y de algunas combinaciones simples como sumas, diferencias, productos y cocientes de estos tipos de funciones.

3.5.2 Modelación con funciones

- Sabrá interpretar el comportamiento de una relación de dependencia funcional y de proponer relaciones funcionales para representar situaciones cuyas características estén definidas en forma verbal. También podrá interpretar los elementos de una relación funcional dentro de un contexto dado y obtener conclusiones válidas sobre el proceso en cuestión.

3.5.3 Idea intuitiva de aproximación y del concepto de límite

- El estudiante será capaz de resolver y plantear problemas que requieran ser tratados a través de aproximaciones y tendrá un acercamiento intuitivo del concepto abstracto de límite.

3.5.4 Tangente a una curva

- El estudiante entenderá el concepto de recta tangente a través de ejemplos de tangentes a circunferencias y a curvas cónicas, caracterizándolas como aquellas rectas que tocan a las curvas en un solo punto. Podrá abstraer la idea fundamental de recta tangente y llegar al concepto de tangente a una curva utilizando la definición como límite de cocientes, aún sin definir formalmente el límite.

3.5.5 Razón de cambio instantánea y su relación con la tangente a una curva

- Podrá analizar el crecimiento de una variable que cambia a lo largo del tiempo. Comprenderá la relación entre la pendiente de la recta tangente y la razón de cambio instantánea. Podrá resolver problemas de diversa índole que involucren el cálculo de límites de aproximaciones sucesivas por medio de la noción de límite, de una función en un punto dado x_0, como el número hacia el cual se acercan los valores de la función cuando la variable independiente x se acerca a x_0.

3.5.6 Funciones exponenciales y logarítmicas

- Entenderá las funciones exponenciales y logarítmicas vistas a partir de los problemas de interés compuesto y del crecimiento de poblaciones y otros ejemplos. Sabrá obtener las derivadas de dichas funciones. La exponencial natural y el logaritmo natural. Entenderá las funciones que se obtienen combinando la exponencial y el logaritmo con funciones polinomiales, racionales y trigonométricas.

3.5.7 Cálculo de tangentes a ciertas curvas usando la definición de límite

- Será capaz de calcular a partir de la definición de límite, las tangentes de gráficas de funciones cuadráticas, polinomios de grados superiores a dos y de potencias negativas, derivadas del seno y del coseno. Podrá descubrir y encontrar demostraciones de las reglas de derivación de sumas de funciones, constantes por una función dada, productos de funciones, cocientes de funciones, de composición de funciones y también la derivada de una composición de funciones.

3.5.8 Análisis de las gráficas de funciones

- Sabrá aplicar la derivada al estudio del comportamiento de las gráficas de funciones polinomiales, racionales y trigonométricas, así como de las que se pueden obtener utilizando combinaciones algebraicas de ellas. Sabrá comparar funciones usando la derivada.

3.5.9 Cálculo de máximos y mínimos

- Será capaz de plantear problemas de optimización. Entenderá y resolverá problemas que involucren el cálculo de valores máximos y mínimos de una función.

3.5.10 Idea intuitiva de la integral en términos de sumas de Riemann

- Tendrá nociones del concepto de integral definido, presentado como límite de sumas de Riemann, pero sin usar una definición formal del límite. Ejemplos de integrales que pueden calcularse directamente como límite de las sumas de Riemann. Conocerá el Teorema Fundamental del Cálculo (que relaciona la derivada con la integral de manera que permite realizar cálculos de integrales definidas usando el proceso inverso de la derivación, al cual se le llama la integral indefinida o antiderivada). Será capaz de comprender este teorema y de dar una demostración intuitiva, que explique por qué es válido y será capaz de comprender su importancia para resolver problemas de integración.

3.5.11 Aplicaciones del concepto de integral

- Ser capaz de aplicar el teorema fundamental para calcular áreas de superficies, longitud de curvas, distancias recorridas, etc. Tanto en el sentido de ser capaz de plantear tales problemas utilizando la integral y de tener la habilidad de resolver algunos de ellos utilizando el procedimiento de encontrar la antiderivada de una función obteniendo el resultado como la diferencia de los valores en los extremos del intervalo de integración.

3.5.12 Problemas que involucran ecuaciones diferenciales simples

- Conocer el concepto de ecuación diferencial y ser capaz de aplicarlo para plantear matemáticamente algunos problemas como el crecimiento de poblaciones en tales términos y ser capaz de comprender qué significa tener una solución de una ecuación diferencial y de obtener algunas soluciones en casos particularmente simples.

3.5.13 Desarrollo histórico de los conceptos del cálculo

- Conocer la historia del cálculo, desde sus orígenes en la antigua Grecia hasta la creación del cálculo diferencial y el descubrimiento del teorema fundamental y sus aplicaciones para resolver problemas prácticos interesantes.
- Conocer la relación del problema del movimiento planetario con la creación del cálculo y la aparición de las ecuaciones diferenciales.

3.6 Estándares para estadística y probabilidad

La estadística y la probabilidad son ramas de las matemáticas que se ocupan del manejo de información y de la descripción y el análisis de los fenómenos aleatorios. Igualmente procura conocer el comportamiento de las variables dentro de una población, a partir del estudio de una muestra, con la finalidad de resolver una problemática o planear a futuro.

Son herramientas para apoyar las actividades humanas donde se maneja información. Resuelven las necesidades de cuantificación en las ciencias sociales y sirven como apoyo a la investigación científica en general y en los últimos años han cobrado gran relevancia prácticamente dentro de cualquier actividad humana.

Debe considerarse que casi todas las personas estamos expuestas a información estadística de todo tipo y por todos los medios. Ello hace indispensable la capacidad de leer e interpretar críticamente este tipo de información; puede incluso decirse que esta capacidad es tan importante como la de saber leer y escribir en la propia lengua.

La estadística y la probabilidad apoyan a procesos de mercado, de investigación y de desarrollo tecnológico. También a ciencias como la biología, medicina, psicología, economía, investigación y desarrollo de nuevos fármacos, desarrollo sustentable, seguridad social, deporte y entretenimiento, entre otros.

Igualmente, si consideramos que el día a día está totalmente imbuido en el azar, es también indispensable desarrollar una mínima habilidad para tomar decisiones bajo condiciones de azar.

De este modo, una buena formación en estadística y probabilidad, a los niveles propios de la escuela media superior, resulta parte fundamental del perfil de todo egresado de

bachillerato y, en ese sentido, se espera que dichos egresados adquieran bases sólidas en estas disciplinas. Para esto, deben tenerse claros los distintos niveles de aprendizaje en estadística y probabilidad:

- **Cultura estadística**.- Corresponde a la comprensión y uso del lenguaje, símbolos y técnicas estadísticas básicas, así como manejar e interpretar representaciones de datos.
- **Razonamiento estadístico**.- Es la manera como las personas argumentan sobre las ideas estadísticas y el sentido que le dan a la información estadística; implica conectar conceptos o combinar ideas acerca de los datos y la probabilidad, y entender y explicar los procesos estadísticos e interpretar los resultados.
- **Pensamiento estadístico**.- Implica la comprensión del por qué y de cómo se realizan las investigaciones estadísticas, entendiendo cómo se utilizan los modelos para simular los fenómenos aleatorios, cómo se diseñan los experimentos para obtener datos que permitan estimar las probabilidades asociadas a un fenómeno. reconoce cómo, cuándo, y por qué los instrumentos deductivos existentes se pueden utilizar. Implica también entender y utilizar el contexto de un problema para emitir conclusiones y planear investigaciones.

El objetivo principal en la formación en estadística y probabilidad debe ser el desarrollo del pensamiento estadístico del estudiante, evitando caer exclusivamente en los modelos de enseñanza basados en cálculos, donde se descuidan la construcción de conceptos y la interpretación de resultados.

En cuanto a contenidos, en la construcción de los aprendizajes propios de la estadística y la probabilidad deberán tenerse siempre presentes tres conceptos fundamentales:

- Tendencia
- Variabilidad
- Distribución

Respecto al **uso de la tecnología**, debe insistirse en el uso de los diversos recursos tecnológicos que pueden apoyar el aprendizaje y las aplicaciones prácticas de la estadística y la probabilidad. Se recomienda que su uso didáctico se enfoque a:

- Manejo de grandes cantidades de datos.
- Modelación y simulación de fenómenos aleatorios.
- Simplificación de los cálculos.

Los conocimientos, habilidades, actitudes y valores que se espera que sean parte de la formación del egresado de bachillerato, en lo tocante a las áreas de probabilidad y estadística, pueden englobarse en tres grandes rubros:

3.6.1 Alfabetización estadística

Se refiere a saber construir, manipular, interpretar y evaluar críticamente la información estadística. Aquí, el estudiante realizará inferencias informales acerca del comportamien-

to de una característica de interés en una población definida dentro de su entorno, a partir del análisis de su tendencia, variabilidad y distribución, en una muestra obtenida de dicha población, para contribuir a la formación de su pensamiento estadístico.

- Reconocerá las nociones de población, muestra y variable, así como la importancia del muestreo. Explicará el comportamiento de una colección de datos a partir de su tendencia, su dispersión y su distribución, dentro del contexto de una investigación o problema, por medio de tablas, gráficos y valores descriptivos. Establecerá hipótesis acerca del comportamiento de dicha variable en una población. Construirá y explicará la relación entre dos variables cualitativas o cuantitativas, dentro del contexto de una investigación o un problema y podrá realizar predicciones por medio del ajuste de curvas.

3.6.2 Razonamiento probabilístico

Consiste en la estimación de la probabilidad de ocurrencia de un evento en función del conocimiento y la información que tengamos a nuestra disposición, misma que le permita una interpretación inteligente y razonada de los resultados.

- El estudiante desarrollará su pensamiento probabilístico, a través del conocimiento y de la modelación de fenómenos aleatorios, partiendo de los tres enfoques de la probabilidad (clásico, subjetivo y frecuencial), con la finalidad de tomar decisiones.
- Descubrirá que puede construir eventos compuestos a partir de la disyunción, la conjunción o la negación, y calculará las probabilidades para este tipo de eventos. Calculará las probabilidades de eventos por medio de la definición frecuencial, usando simulaciones físicas y la modelación con alguna herramienta de software.
- Establecerá el concepto de eventos independientes y el cálculo de la probabilidad conjunta para este tipo de eventos. Descubrirá que un fenómeno aleatorio puede ser modelado por su tendencia, dispersión y distribución, descritos por su esperanza matemática, desviación y distribución de probabilidad estándar. Calculará probabilidades por medio de las distribuciones binomial o normal estandarizada, en el contexto de una investigación o un problema.

3.6.3 Inferencia

Se refiere a las conclusiones que pueden obtenerse acerca del comportamiento de una variable en una población, a partir de la información que se obtiene de una muestra, considerando la variabilidad y el azar presentes en el muestreo. Puede manejarse a dos niveles: informal y formal.

a) La *informal* es la manera en que se utiliza la experiencia y los conocimientos para proponer hipótesis acerca de poblaciones desconocidas, a partir de muestras parciales de dichas poblaciones. Sus componentes principales son razonar sobre:
   I. las posibles características de una población a partir de una muestra.
   II. las posibles diferencias y relaciones entre dos poblaciones a partir de dos muestras.
   III. la variabilidad de las muestras de datos.

b) La *formal* permite deducir o descubrir regularidades de una población mediante la aplicación de procedimientos y métodos estadísticos específicos.

- El estudiante realizará inferencias formales acerca del comportamiento de una variable de interés en una población, a partir del análisis de una muestra, para fundamentar una toma de decisiones en una investigación estadística, consolidando la formación de su pensamiento estadístico.
- Evaluará las posibles características de una población, a partir de los datos de una muestra de manera informal, en el contexto de una investigación o un problema, así como el impacto del azar en el muestreo y concluirá que los estimadores son variables aleatorias.
- Deducirá la idea general contenida en el Teorema del Límite Central e inspeccionará el comportamiento de las medias o de las proporciones muestrales como variables aleatorias, dentro del contexto de un problema o una investigación, en términos de tendencia, dispersión y distribución.
- Construirá los conceptos de estimación por intervalo y de prueba de hipótesis, a partir de un problema y deducirá las expresiones para el cálculo de intervalos de confianza y el proceso de prueba de hipótesis para media y para proporción, bajo las condiciones del Teorema del Límite Central.
- Evaluará las posibles características de una población, a partir de los datos de una muestra, de manera formal, en el contexto de una investigación o un problema.

Capítulo 4

Problemas ilustrativos

Capítulo 4
Problemas ilustrativos

En general, es difícil discernir una frontera clara entre las ramas de las matemáticas y esto se ve reflejado en los problemas que se presentan en esta sección. En muchos de los problemas propuestos en un área determinada, uno nota inmediatamente que involucra conceptos o ideas relacionadas con otra. Uno de los retos para el profesor es lograr que el estudiante perciba esta unidad interna de las matemáticas. Otro reto consiste en diseñar las actividades apropiadas que lleven al estudiante a adquirir el conocimiento matemático y las habilidades necesarias que le permitan resolver problemas como los que se proponen.

Los problemas buscan apoyar al profesor para encarar estos retos, y pueden abordarse en clase, generar proyectos de trabajo, e inclusive programar talleres y cursos para intercambio de experiencia docente.

4.1 Problemas de números y álgebra

1. ¿En cuánto aumenta el área de un rectángulo si su longitud aumenta 20% y su ancho 10%?

2. Un litro de agua de mar contiene 0.0001 mg de oro. ¿Cuántos kilogramos de oro hay en un kilómetro cúbico de agua de mar?

3. Los precios de tres productos T_1, T_2, T_3 que costaban lo mismo han aumentado. El precio de T_1 aumentó en dos ocasiones, primeramente el 10% y después el 30%. El precio de T_2 subió una ocasión, en 40%. El precio de T_3 subió en dos ocasiones, la primera 20% y la segunda 20%. ¿Siguen costando lo mismo o ahora hay un producto más caro y otro más barato? Justifica tu respuesta.

4. El sistema de enfriamiento de un automóvil debe tener 16 litros de líquido con un 35% de anticongelante. Si el auto tiene sólo 20% de anticongelante, ¿cuántos litros del líquido se deben sustituir por anticongelante para que esté al 35%?

5. En un mercado, un locatario tiene 60 melones, 30 que desea vender a tres piezas por $10 y 30 que desea vender a dos piezas por $10. Entonces, la venta de los 60 melones debe dejar un total de $250 (¿por qué?). Pensando en la mejor estrategia de venta, razona de la siguiente manera:

   Si vendo primero los de dos por diez, tal vez se les hagan caros y no me los compren. Si vendo primero los más baratos, entonces la gente no va a querer comprarme los más caros. Lo que me conviene hacer es formar pilas de cinco melones y darlas a $20 cada pila.

   Así lo hace. Después de vender todos los melones resulta que ha obtenido $240, pero él esperaba haber obtenido $250, ¿qué fue lo que pasó?

6. (Tomado de El hombre que calculaba). El Hombre que Calculaba y el mercader viajaban a lomos del camello de este último cuando, en medio del desierto, se encontraron a tres hombres ante un grupo de camellos, los hombres discutían acaloradamente. Cuando los viajeros preguntaron qué pasaba, los rijosos explicaron que eran hermanos y trataban de repartirse los 35 camellos que ahí estaban, según las indicaciones de su padre. Al mayor le tocaba la mitad de los camellos, el mediano debía quedarse con un tercio de los camellos, mientras que al menor le correspondía un noveno de los animales. Los hermanos no podían ponerse de acuerdo en el número de camellos que debían tener cada uno, pues al mayor le correspondían 17.5 camellos, al mediano 11.66 y al menor sólo 3.88. Pero, ¿cómo repartírselos sin matar animales? El hombre que calculaba resolvió el problema de la siguiente manera. Les propuso unir el camello en el que viajaban a los otros animales y hacer la repartición, les aseguró que ésta sería justa (al mercader no le gustó la idea pues corrían el peligro de quedarse sin medio de transporte). Así pues, al mayor le tocarían 18 camellos, al mediano 12 y al menor 4. Los hermanos agradecidos por el reparto, le preguntaron al Hombre que Calculaba qué podían hacer para retribuirle su ayuda, a lo que él respondió: Devuelvan a este caballero su animal, hagan el reparto como les digo y, si sobra algún animal, me lo obsequian como pago. Al sumar la cantidad de camellos que se repartieron, se dieron cuenta de que eran 34, y el camello sobrante pasó a ser propiedad del Hombre que Calculaba.

   Explica esta aparente paradoja.

7. Clavius (1608). Un terrateniente contrata a un sirviente por un año; como pago por sus servicios le dará una capa y diez monedas de oro. Al cabo de siete meses, el terrateniente decide despedir al sirviente y como pago por el tiempo que trabajó le da la capa y dos monedas de oro. ¿Cuánto cuesta la capa?

8. Tenemos tres terrenos cubiertos de hierba de la misma espesura y crecimiento. Tienen un área de 3 1/3 Ha, 10 Ha y 24 Ha. La hierba del primero es comida por 12 toros durante 4 semanas. La del segundo por 21 toros durante 9 semanas ¿Cuántos toros comerán la hierba del tercero durante 18 semanas?

9. Problema de Sridhara (matemático indio de la Edad Media).

La quinta parte de un enjambre de abejas se posó en una flor de kadmba, la tercera parte en una flor de silinda. El triple de la diferencia entre esos dos números voló hacia una flor de krutaja, y una abeja quedó sola volando de un lado a otro atraída por el perfume de un jazmín y un pandnus. ¿Cuál es el número de abejas que formaban el enjambre?

10. Una persona gasta 1/8 de su salario en ropa, 1/3 en comida, 1/4 en diversión y en tres meses ahorra $7200. ¿Cuánto es su salario mensual?

11. El lunes gasté la mitad de mi dinero más $2. El martes gasté la mitad de lo que me sobró más $2. El miércoles la mitad de lo que me sobró más $2 y se me termina el dinero. ¿Cuánto tenía al principio?

12. En un apagón, Miguel utilizó dos velas nuevas, ambas de la misma longitud; una ardía en cuatro horas y la otra en cinco. Cuando regresó la luz notó que una de ellas era exactamente cuatro veces la longitud que quedaba de la otra. ¿Cuánto tiempo ardieron las velas?

13. Un hombre toma un barril de agua en 14 días. Junto con su esposa se toma esta misma cantidad de agua en 10 días. ¿En cuántos días la esposa se toma esta misma cantidad de agua?

14. Dos personas partieron simultáneamente del punto A en dirección al punto B. El primero iba en bicicleta, el segundo en automóvil y su velocidad era 5 veces mayor que la del primero. En un punto del camino el carro se quedó sin gasolina. El automovilista continuó a pie y su velocidad era dos veces menor que la del ciclista. Si ambos llegaron al punto B al mismo tiempo, ¿en qué punto del camino el automovilista dejó el carro?

15. Dos líneas férreas se cruzan en ángulo recto. Los trenes se acercan hacia el cruce. Uno parte de una estación a 40 km del cruce, el otro a 50 km. El primero marcha a 800 m por minuto y el otro a 600 m por minuto. ¿Cuántos minutos transcurrirán para que los trenes se acerquen a la menor distancia entre sí y cuál será esa distancia?

16. Se utiliza una manguera para llenar una alberca en 30 horas. Si se abre el tubo de desagüe la alberca se vacía en 24 horas. A las 28 horas de que empezó el llenado, se descubre que la alberca está a la mitad de su capacidad, ¿durante cuánto tiempo estuvo abierto el desagüe?

17. ¿Cómo se pueden dividir 7 manzanas entre 12 niños de modo que cada uno de ellos reciba la misma cantidad y ninguna manzana sea divididad en más de cuatro partes?

18. En una Feria Internacional de la Lectura, Alfonso llega a un *stand* de juegos y libros para niños. En ese *stand* le presentan dos cubos de distinto tamaño, y dos juegos de tres prismas iguales entre sí (seis en total). El empleado del *stand* le reta a armarlos en

un cubo y Alfonso recuerda el binomio al cubo. Inmediatamente resuelve el problema. ¿Cómo razonó Alfonso para resolver esto?

19. ¿Cuál es el número mínimo de puntos con el que un equipo puede ser campeón, si son 8 equipos y juegan todos contra todos? Considérense dos casos:
    a) El ganador obtiene 2 puntos, el perdedor 0 y por empate cada equipo recibe 1.
    b) El ganador obtiene 3 puntos, el perdedor 0 y por empate cada equipo recibe 1.

4.2 Problemas de geometría

La lista de problemas que hemos clasificado como geométricos dista mucho de ser exhaustiva y no se limita a la geometría euclidiana en dos y tres dimensiones, sino que incluye algunos concernientes a geometría analítica como ecuaciones paramétricas y funciones, que no caen directamente en el ámbito de la geometría euclidiana y otros propios de la trigonometría.

1. Perspectiva

    1.1.a. En una clase de dibujo se pidió a los estudiantes que representaran un cubo. En la figura se presentan cinco de estas representaciones. ¿Cuál o cuáles de ellas se puede decir que representan realmente un cubo? Explica tu respuesta.

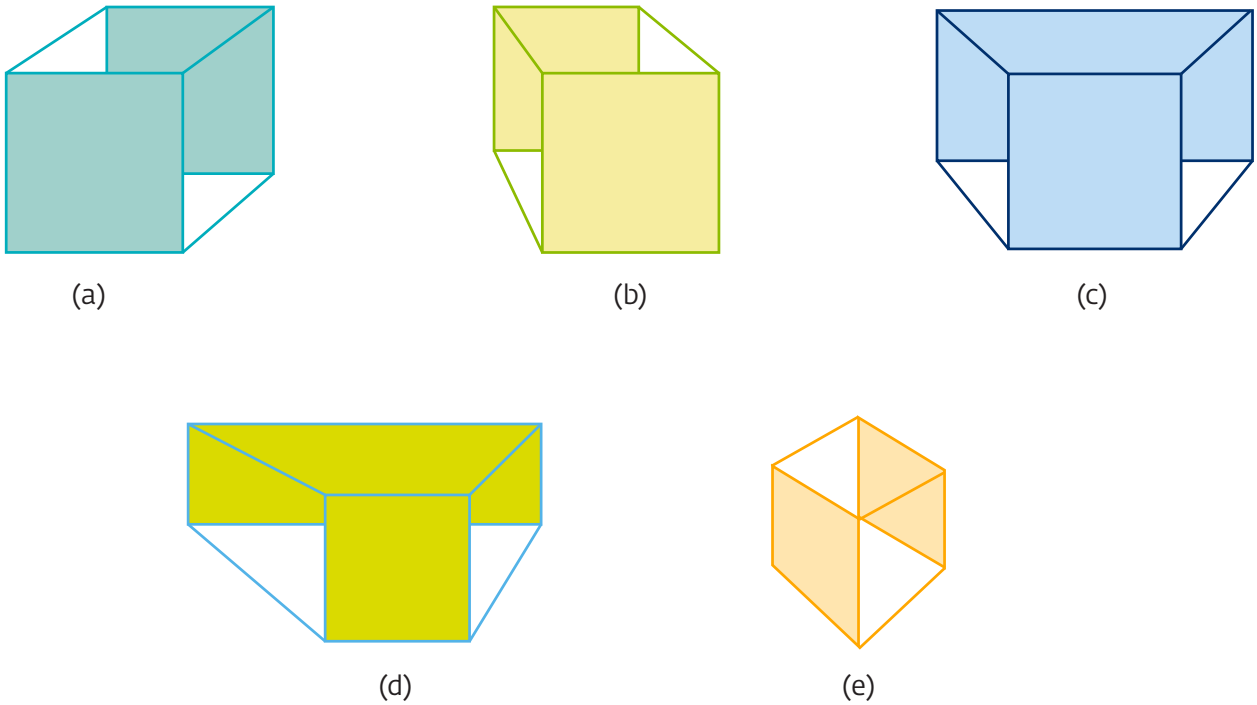


Figura 1

    1.1.b. Considerando la representación o las representaciones que seleccionaste como cubos, ¿cómo puedes saber que es un cubo y no otro poliedro? Explica tu respuesta.

1.2. Una pintora está a una distancia p_1 de su lienzo y tiene a dos modelos de alturas a_1 y a_2 alejados de ella distancias m_1 y m_2, respectivamente. ¿De qué altura se proyectarán los modelos en el lienzo para que se vean en perspectiva?

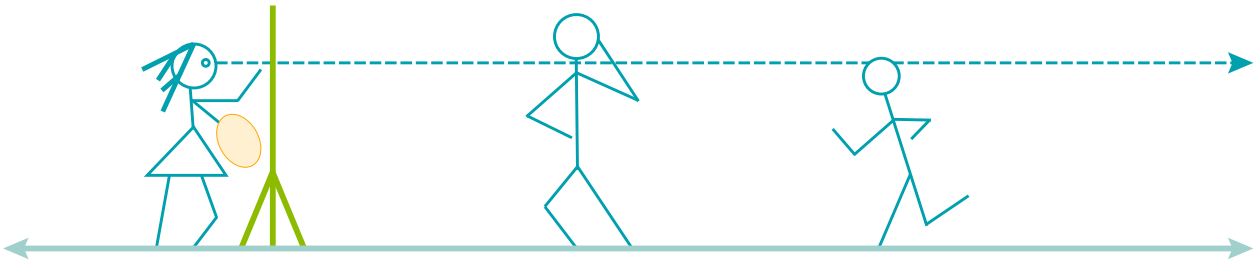


Figura 2

1.3. En la figura tenemos un piso rectangular compuesto por 9 losetas. Dibuja una hilera más en cada lado del piso sin que se pierda la perspectiva.

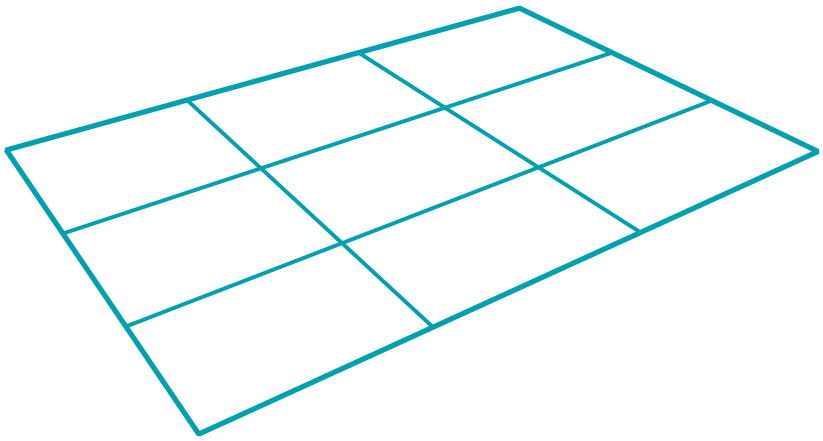


Figura 3

¿Cuántas losetas habrá en total?
Explica cuál fue el procedimiento que seguiste.

2. Un terrateniente poseía un vasto dominio que carecía de agua corriente. Tenía tres hijos que no se llevaban nada bien entre ellos y vivían en los límites del dominio en puntos lo más alejados posible uno de otro. Conociendo la rivalidad de sus hijos, decidió contratar al agrimensor Salomón para que determinara límites en su tierra de forma que se dividiera lo más cercano a tres partes iguales; además, le pidió que determinara un punto en el cual se pudiera perforar un pozo y al cual se tuviera acceso sin tener que cruzar por la tierra de sus hermanos.
¿En dónde se debe perforar el pozo y cuáles son estos límites?
Explica por qué la división es lo más equitativa posible.

3. En una empacadora de jugos se quiere diseñar un envase con forma de tetraedro que contenga 355 ml de refresco. Encuentra la longitud de sus aristas y la altura que debe tener el envase.

4. En la figura tenemos una alberca vacía. Si queremos llenarla de modo que el agua llegue a 10 cm antes de desbordarse ¿cuántos litros de agua se necesitan?

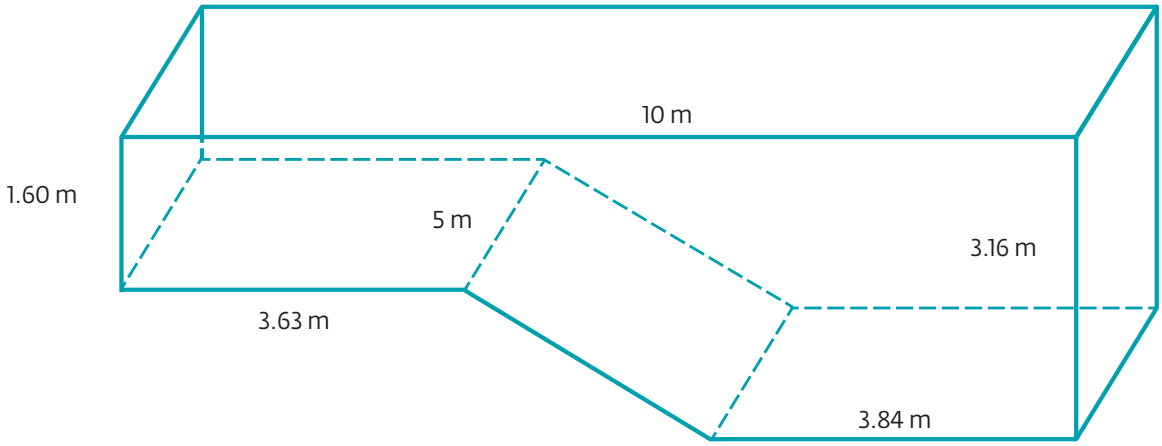


Figura 4

Explica cómo obtuviste el resultado.

5. Se quiere excavar un túnel de 800 m de largo. Si su sección transversal tiene forma circular, pero su perímetro sólo abarca tres cuartos de una circunferencia de 7 m de diámetro,

Figura 5. La foto corresponde al metro de Madrid.

a) ¿qué ancho tendrá la carretera en el túnel? Explica tu respuesta
b) ¿cuál es la altura máxima del túnel? Explica tu respuesta.

6. El siguiente pasaje es un extracto del relato de E. A. Poe, Un Descenso al Maelström, publicado en 1841. Fue tomado de la traducción de Julio Cortázar, publicada en 1970 por Alianza Editorial.

   "En pocos minutos más, una nueva y radical alteración apareció en escena. La superficie del agua se fue nivelando un tanto y los remolinos desaparecieron uno tras otro, mientras prodigiosas fajas de espuma surgían allí donde antes no había nada. A la larga, y luego de dispersarse a una gran distancia, aquellas fajas se combinaron unas con otras y adquirieron el movimiento giratorio de los desaparecidos remolinos, como si constituyeran el germen de otro más vasto. De pronto, instantáneamente, todo asumió una realidad clara y definida, formando un círculo cuyo diámetro pasaba de una milla. El borde del remolino estaba representado por una ancha faja de resplandeciente espuma; pero ni la menor partícula de ésta resbalaba al interior del espantoso embudo, cuyo tubo, hasta donde la mirada alcanzaba a medirlo, era una pulida, brillante y tenebrosa pared de agua, inclinada en un ángulo de cuarenta y cinco grados con relación al horizonte, y que giraba y giraba vertiginosamente, con un movimiento oscilante y tumultuoso, produciendo un fragor horrible, entre rugido y clamoreo, que ni siquiera la enorme catarata del Niágara lanza al espacio en su tremenda caída."

   a) Con los datos que da el narrador sobre el remolino, estima su profundidad en metros. Explica qué suposiciones hiciste.
   b) ¿Qué volumen tiene el hueco que forma el Maelström en el mar? Explica tu respuesta.

7. En la figura te presentamos un octágono y todas sus diagonales.

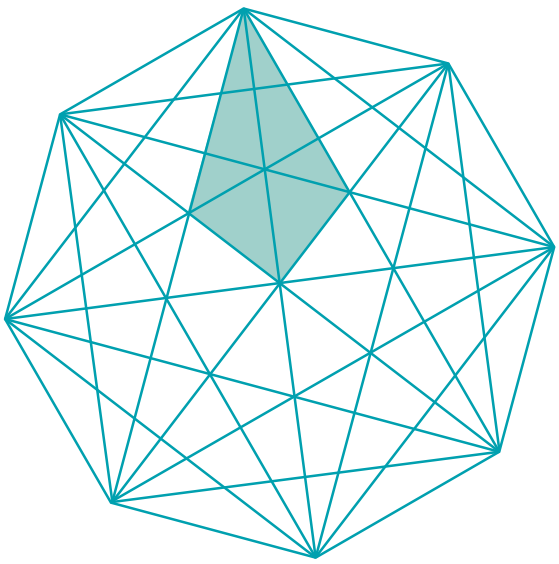


Figura 6

a) Si se tiene la medida del lado del octágono, ¿es posible calcular las dimensiones del cuadrilátero coloreado? Explica tu respuesta.
b) En el octágono encuentra todos los cuadriláteros semejantes al coloreado y explica por qué son semejantes.

8. El cometa Halley se mueve en una órbita elíptica en la cual el sol es uno de los focos; si su afelio es de 35 UA y su perihelio de 0.6 UA, encuentra la ecuación de su órbita.

9. Un grupo de topógrafos deben calcular la altura de una montaña. Para ello, desde un cierto punto en el nivel del suelo, miden el ángulo de elevación a la cima de la montaña, éste ángulo fue de 21.7°. Después se acercan 500 m, preservando el nivel, a la montaña y vuelven a medir el ángulo de elevación, éste fue de 35.9°. Encuentra la altura de la montaña.

10. Tenemos dos globos aerostáticos anclados a 20 m y 17 m de altura con respecto al suelo. Desde el mismo punto donde deben aterrizar se miden ángulos de elevación a los dos globos de 57° y 73°, respectivamente. ¿Cuáles son las distancias mínima y máxima que separa a los globos?

11. Encuentra el área del triángulo cuyos vértices son los puntos (-3, 5.2), (4, 7.2) y (-1, 2.3)

12. En la tabla se muestran las coordenadas de un cometa en su órbita alrededor del Sol, que se encuentra situado en un foco de la elipse. Para tomar las coordenadas se colocó el origen de coordenadas en el Sol y eje mayor a lo largo del eje x (las unidades de las coordenadas son UA, unidades astronómicas).

x	y	x	y
-2.1	5.5	900.1	36.1
12.9	16.3	982.4	10.9
62.6	31.5	923.4	-31.5
244.5	54.6	663.0	-52.9
579.3	62.0	450.0	-62.8
778.1	51.6	141.6	-44.5

Tabla 2

(a) Encuentra la ecuación que se ajuste a los datos de la tabla.
(b) ¿Cuál es la mayor distancia del cometa al Sol o afelio?
(c) Encuentra la excentricidad de la órbita.

13. Se tiene un envase con forma cónica de 11 cm^2 de base y 15 de altura. El envase está completamente sellado y tiene líquido en su interior. Cuando descansa sobre su base, el líquido llega a una altura de 7 cm. Si se voltea el cono completamente, ¿a qué altura llegará el líquido?

14. En la figura tenemos que TU y SR son perpendiculares, siendo R el centro del círculo.

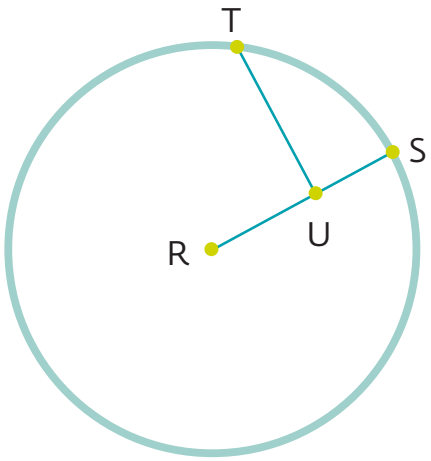


Figura 7

a) Si TU mide 5 cm y SU 2, encuentra el área del círculo.
b) ¿Cuál es la medida en radianes de la longitud de arco que subtiende el ángulo TRS?

15. La curva conocida como epicicloide es la trayectoria que traza un punto que se encuentra sobre la circunferencia de un círculo cuando se le hace rodar (sin resbalarse) sobre otro. Encuentra la ecuación de una epicicloide si el radio de los círculos es de 5 cm.

16. Una bicicleta se desplaza de un punto a otro por una vía completamente plana. A 40 metros de su punto de destino una de sus ruedas pisa un trozo de chicle y éste se queda adherido a la llanta que tiene 35 cm de radio. Encuentra las ecuaciones paramétricas que describen el desplazamiento del trozo de chicle.

17. ¿Qué forma tiene la gráfica cuyas ecuaciones paramétricas son $x = 7\cos(t)$, $y = 7\text{sen}(t)$, $z = t$?

18. ¿Qué forma tiene la gráfica cuyas ecuaciones paramétricas son $x = t\cos(t)$, $y = t\,\text{sen}(t)$, $z = t$, cuando $0 \leq t \leq 6\pi$?

4.3 Problemas de cálculo y funciones

En una lista de problemas tan pequeña como ésta, necesariamente quedan temas sin tratar. Es sólo una muestra que contiene tanto problemas que se espera que pueda resolver un estudiante al egresar del bachillerato, como situaciones problemáticas que pueden servirle de guía al profesor en el tratamiento de algunos temas. Se busca que los problemas ilustren que el cálculo es una disciplina que conjunta el conocimiento matemático adqui-

rido por el estudiante del nivel medio superior, y en la cual se plantean problemas cuya solución requiere el uso de métodos que surgen de la idea de aproximación, así como de las habilidades adquiridas a lo largo de los estudios. Algunos de estos problemas están pensados como temas a tratar en clase. En particular, los puntos 5, 7 y 8, de esta lista, son esquemas de situaciones generales que el profesor puede utilizar para construir problemas con datos específicos.

1. Incomensurabilidad de la diagonal de un cuadrado. Generalmente, esto se trata como un problema de números y se llega a una contradicción debido a la distinta paridad de los términos de una ecuación; sin embargo, más acorde con un curso de cálculo, está una construcción geométrica iterativa que mostramos a continuación (ver figura). Supóngase que se tiene un cuadrado ABDC de lado 1. Los segmentos DC y DE tienen la misma longitud; se completa el cuadrado AEFG; Se repite el proceso tomando como base el cuadrado AEFG y se construye el cuadrado AHIJ; Ahora FG = FH. Este proceso se puede repetir una infinidad de veces. Se llega a una contradicción si se supone que la diagonal es un número racional. ¿Cuál es esta contradicción?

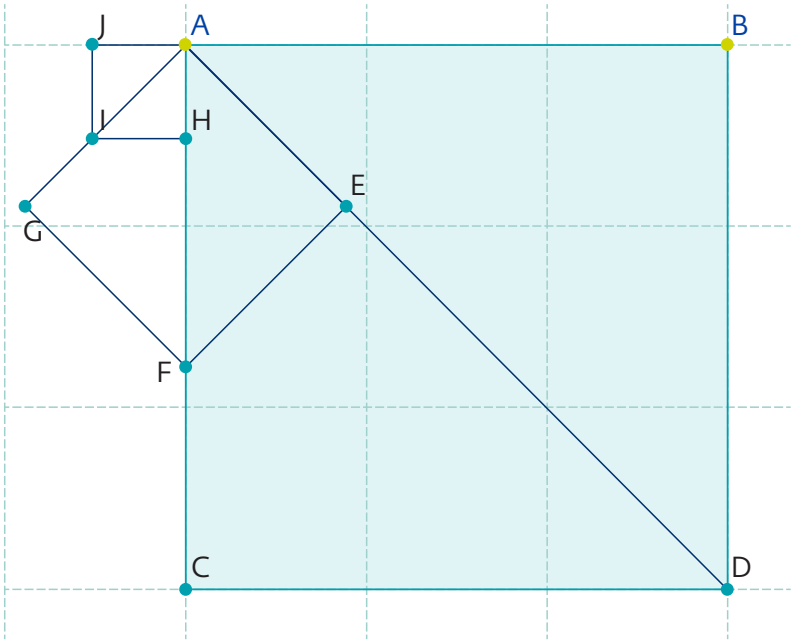


Figura 8

2. Encuentra un irracional que diste de 1, menos que 10^{-20}. ¿Para cada número natural k, puedes encontrar un irracional que diste de 1, menos que 10^{-k}?

3. El problema de encontrar una sucesión de racionales que converja a un irracional puede ser en algunos casos un problema complicado. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots$ que satisfacen $x_{n+1}=x_n/2+2/x_n$. Si x_1 es racional entonces x_n es racional. ¿Puedes encontrar k tal que x_k diste de $2^{1/2}$ menos que 10^{-6}?

4. En una pared vertical está colgado un cuadro de altura L. ¿A qué distancia de la pared debe situarse una persona para que su ángulo de observación sea máximo si la altura de esta es menor que la del observador?

5. Bacteria y penilicina. Supongamos que una población B de bacterias crece en un organismo infectado con una razón $B'(t)=F(B(t))$ y que un cierto antibiótico A las aniquila de modo que la población de bacterias decrece con una rapidez $rA_0\ B(t)$, donde A_0 es la cantidad de antibiótico introducida en el organismo en un cierto instante t* (el parámetro r mide la eficiencia del antibiótico). Se pide analizar el desarrollo de la infección. La dinámica de la población de bacterias estará descrita por

$$B'(t)=F(B(t))-r\ A_0\ B(t).$$

Consideremos un ejemplo de este esquema: Supongamos que $F(B(t)) =k\ B(t)$, es decir la población de bacterias crece exponencialmente

$$B'(t)=k\ B(t).$$

En ausencia del antibiótico, la población de bacterias al tiempo t es $B(t)=B_0\ e^{kt}$; B_0 es el tamaño inicial de la población de bacterias. Supongamos ahora que en un instante posterior t_u se introduce en el organismo una cantidad A_0 del antibiótico cuya eficiencia $r=r(t)$ es función del tiempo t. Entonces, durante el intervalo $(0,t_u)$ la población de bacterias crecerá exponencialmente y al tiempo t_u su tamaño será

$$B(u)= B_0\ e^{kt_u}.$$

A partir del instante t_u, el crecimiento de la bacteria está determinado por

$$B'(t)=k\ B(t)-r(t)A_0\ B(t),$$

es decir

$$B'(t) =(k-r(t)\ A_0)\ B(t).$$

Se pueden considerar diferentes comportamientos del antibiótico. Por ejemplo, suponer que r(t) es constante; r(t) es lineal; r(t) crece durante cierto intervalo pero después empieza a disminuir; o bien, crece hasta cierto instante, después permanece constante durante un intervalo y después decrece. También se puede variar la resistencia del organismo a la presencia de la bacteria; por ejemplo, asumir que la cantidad de bacterias no puede pasar de un cierto umbral durante un intervalo dado de tiempo. Aunque las ecuaciones que aparecen se pueden resolver, con los alumnos podría ser conveniente utilizar un paquete de cómputo adecuado para analizarlas numéricamente.

6. Un cubo C de 1 cm de lado tiene un área superficial de 6 cm^2.
   a) Se divide C en cubos de 1 mm de lado ¿Cuál es el área total de todos los cubos?, ¿cuál es su volumen?
   b) ¿Cuál es el área total de todos los cubos si se divide en cubos de lado 10^{-k} cm?, ¿cuál es el volumen?
   c) ¿Qué ocurre cuando k tiende a infinito?
   d) El sabor ácido del café se debe a la oxidación por efecto del aire. Esta oxidación es proporcional al área expuesta. Explique por qué el café molido es más ácido que el café en grano.

7. Determina el volumen máximo que se puede obtener al construir una caja de base cuadrada sin tapa, con una lámina cuadrada de 13 cm de lado. En la figura se muestra una forma de construir la caja; analiza otras posibilidades.

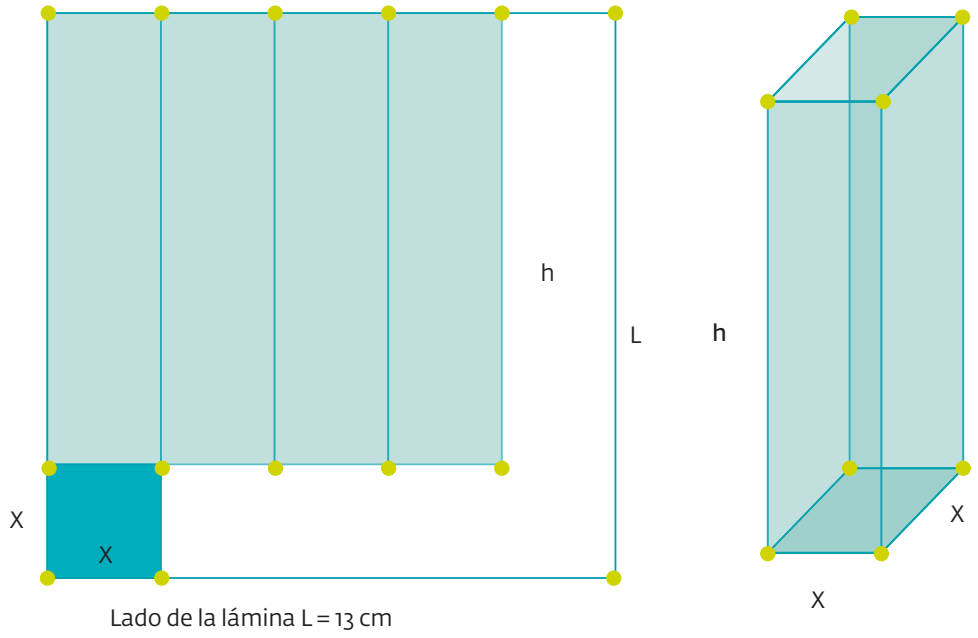


Figura 9

8. Puede decidir cuál es la mejor opción cuando se le plantea que hay dos posibilidades de construir un camino del mismo ancho entre el punto A y B. Uno de ellos es recto pero requiere rellenar cierta zona; el otro tiene lados con forma de una cierta curva (por ej. parabólica) y evita la zona de relleno. Se dan los costos unitarios del metro lineal de guarnición, del metro cuadrado de pavimentación y de metro cúbico de relleno. Su decisión puede tomarse con un cierto margen de error.

9. Dado un tanque de base circular cuya pared es una superficie de revolución generada por la gráfica de una función. Estima el trabajo que se requiere para llenarlo con margen de error dado.

10. Dado un recipiente en forma de prisma con base rectangular lleno de un líquido con densidad r, calcula la fuerza que ejerce el líquido sobre una pared del recipiente.

11. De una lámina rectangular de L unidades de ancho y k unidades de largo se construye una canaleta donde la sección transversal tiene la forma de un trapecio isósceles, determine el valor de los lados, de la base y del ángulo que forma la línea de la base con uno de los lados, para obtener el flujo máximo.

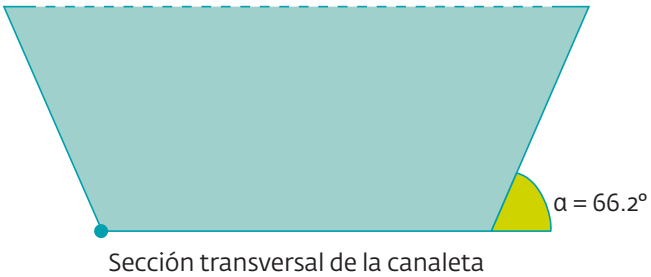


Figura 10

Considere el mismo problema, pero en lugar de calcular el ángulo, calcule la altura de la canaleta.

12. Se tiene una hoja rectangular de dimensiones a y b y se dobla de tal manera que la esquina superior derecha quede en el borde inferior, de tal forma que del lado derecho se forma un triángulo rectángulo. Encuentra la relación funcional entre el área del triángulo y una de sus dimensiones (ver figura).

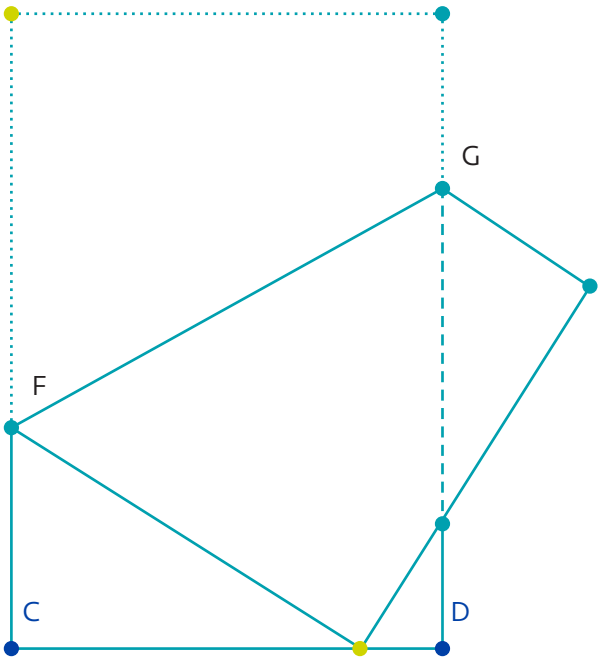


Figura 11

13. El banco A ofrece una tasa de interés anual q_A y el B ofrece una tasa de interés mensual q_B

    a) ¿Qué relación debe haber entre q_A y q_B para preferir el banco B?
    b) En el plano q_A-q_B, describa la región de preferencia por uno u otro banco y la región neutral.

14. Dada una tasa de interés del 6% anual que se capitaliza instantáneamente, calcule la cantidad que se debe depositar para obtener una renta anual de $20000 por 15 años, al término del cual se agota el capital.

15. Se desea construir un pequeño centro comercial para ocho tiendas. Las tiendas son rectangulares de la mismas dimensiones y cada una con una superficie de 5 m^2. El pasillo central y la entrada deben tener 6 m de ancho. La pared frontal de cada tienda da al pasillo y está construida de vidrio.

    Se quiere saber las dimensiones exteriores que deben tener el centro comercial y las de cada uno de los locales para que el costo de la construcción sea el mínimo posible. Como datos adicionales se sabe que el costo de la construcción de pared cuesta α pesos el metro lineal y las divisiones de vidrio valen β pesos por metro lineal, ya considerada la altura que debe tener el centro.

16. Una población de peces varía debido a múltiples factores. En una situación simplificada supondremos que estos se manifiestan a través de la natalidad y mortalidad. La tasa de crecimiento de la población c es igual a la diferencia entre la tasa de natalidad n y de mortalidad m; es decir c=n-m. Si la población sufre una mortalidad por pesca, debemos considerar la tasa de captura r (Supondremos que los cambios en el tamaño de la población se dan mensualmente).
    a) Explica el significado de tasa.
    b) ¿Cómo se puede representar la variación mensual de la población P de peces, denotada por ΔP?
    c) Si la población inicial de peces es P_0, ¿cuál es la población a los t meses?
    d) Analiza el comportamiento poblacional para distintas tasas r y c.

17. En 1964 en el sitio arqueológico de Teotihuacan, México, se realizaron excavaciones en varios basamentos situados a lo largo de la Avenida de los Muertos. Encontraron restos carbonizados de vigas que pertenecieron a techos y jambas, una de las vigas pertenecientes al palacio de Quetzalpapalotl dio 10.86 dpmg de carbono. Calcula la edad en que fue utilizada esta viga si consideramos que la desintegración de referencia de la atmósfera es de 13.56 dpmg.

18. Demostrar que la tangente a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en el punto $P_0(x_0,y_0)$ es la recta perpendicular a la bisectriz del ángulo formado por los segmentos que unen los focos con el punto P_0

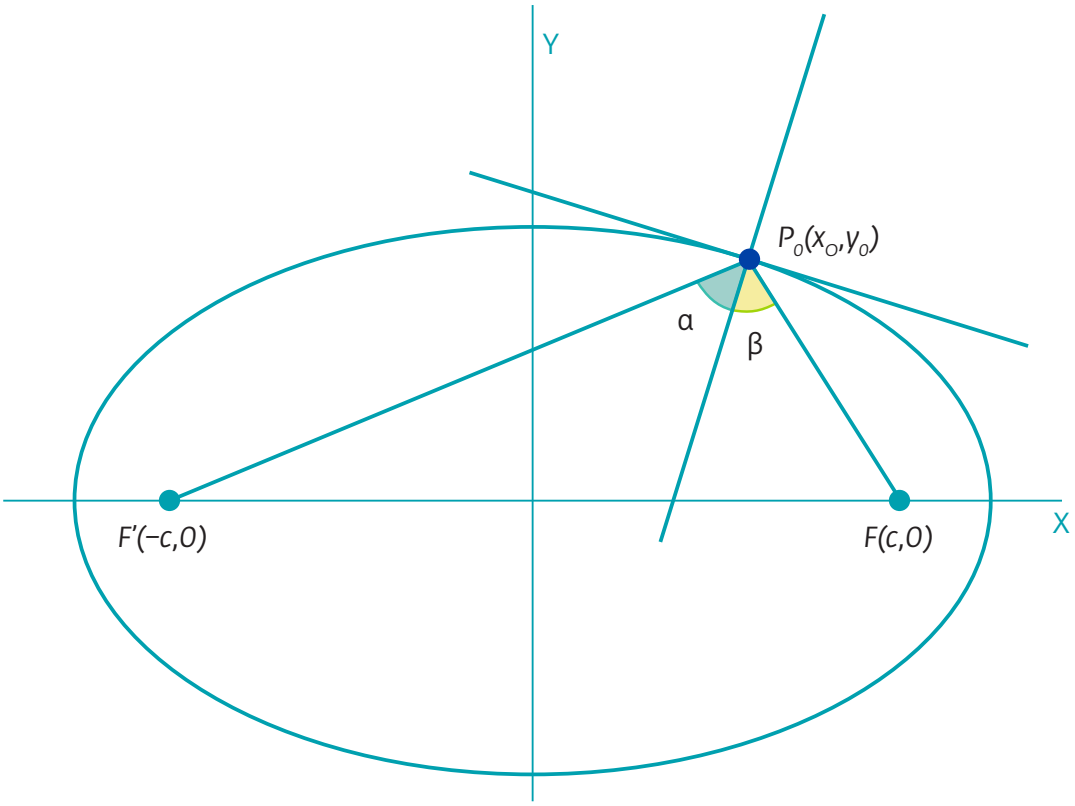


Figura 12

19. En un aserradero se cortan troncos para la construcción de una cabaña campestre. Los troncos son de 2m de largo por 0.5 m de diámetro aproximadamente. Para fines de diseño, el arquitecto requiere que los cortes se hagan como muestra la figura, de manera que las secciones transversales tengan aproximadamente la misma área. ¿A qué distancia del centro deben hacerse los cortes? (Nota: Considera despreciable el grueso de la sierra).

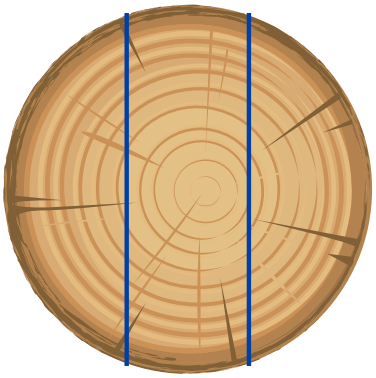


Figura 13

20. En un pentágono regular se trazan los segmentos entre vértices alternados y se determina una estrella. Calcula el área de los triángulos sombreados (ver figura).

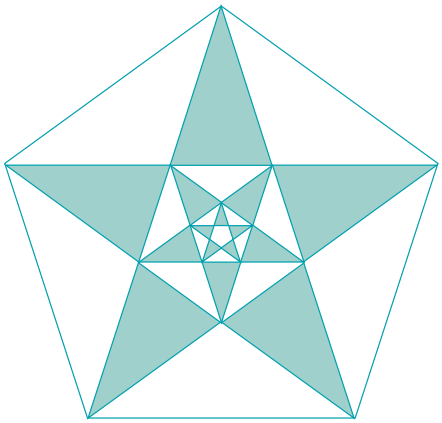


Figura 14

Repite el proceso dentro del pentágono interior y así sucesivamente; en cada iteración sombrea los triángulos de la estrella correspondiente. Calcula el área del conjunto sombreado que se obtiene de este modo.

21. Se fija uno de los extremos de un riel a un círculo de radio 1, con centro en (4,3). Cuando el círculo rota alrededor de su centro, el riel se desliza sobre el punto O=(0,0). El ángulo que forma el riel con el eje x lo denotamos con θ (ver figura).

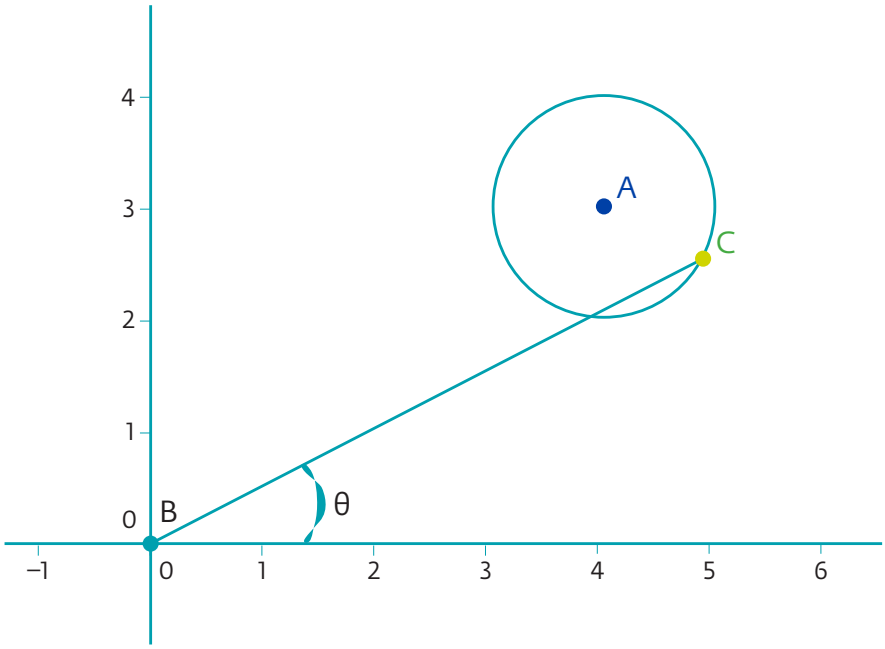


Figura 15

a) ¿Cuál es el valor mínimo de θ?, ¿cuál es el valor máximo de θ?
b) ¿En qué punto C_1 se alcanza el valor mínimo de θ?, ¿en qué punto C_2 se alcanza el valor máximo de θ?

c) Calcula el área de la región limitada por: el segmento que une al origen con el punto C_1, el segmento que une al origen con el punto C_2 y el sector circular entre C_1 y C_2.
d) ¿Cuál es la velocidad del ángulo θ si el círculo rota a razón de 55 rpm?

22. Supongamos que Q(t), el volumen de agua que pasa por una compuerta circular de 50 cm de radio desde el tiempo 0 hasta el tiempo t, está dado por:

$$Q(t)=.25\,\pi\int_0^{t^2} v(s)ds=10t^3-t^4.$$

a) Calcule el instante en que la velocidad del flujo es máxima.
b) Calcule la velocidad del flujo en el instante en que Q es cero.

23. Para atender los servicios educativos de la población que dentro de 20 años se encontrará entre los 15 y 20 años de edad, se ha invertido un fondo de mil millones de pesos a una tasa del 4.5% anual que se paga trimestralmente. Actualmente, la población en edad reproductiva es de dos millones de personas y durante los próximos 6 años crecerá a razón de 1.2% anual. Se tiene prevista una tasa de nacimientos del 2% anual y se ha estimado que la probabilidad de que un individuo alcance una edad t es $P(t) = 25\,t/(256+t^2)$, para t entre 15 y 20. Calcule la cantidad per cápita que le corresponderá a cada individuo del grupo entre 15 y 20 años, al término del periodo de 20 años.

24. En la foto tenemos un filtro de agua hecho de piedra volcánica. Tiene 40 cm de altura, 30 de diámetro exterior y un grosor de 5 cm.

Figura 16

a) Si el interior lo suponemos cónico, calcula el volumen de agua que le cabe.
b) En las especificaciones se dice que filtra el volumen de agua en 6 horas. ¿Cuántos litros por hora se filtran? Explica tu respuesta.
c) Este filtro va sobre un soporte cilíndrico. El reborde superior descansa sobre la parte superior del cilindro. Determina sus dimensiones, considerando que la altura del reborde (donde se ve la mano) es de unos 6 cm. Explica el procedimiento que seguiste.

4.4 Problemas de probabilidad y estadística

Los problemas que se presentan buscan, principalmente, fomentar la interpretación de información estadística y probabilística, la toma de decisiones bajo condiciones de azar y la realización de inferencias estadísticas, informales y formales, por encima de los cálculos meramente aritméticos. Los problemas se presentan para que el profesor los aplique en clases, con la finalidad de generar el conocimiento estadístico a partir de la discusión grupal y el análisis de datos. También se tienen algunos problemas de corte histórico, que permitirán señalar algunos hechos importantes en el desarrollo de la probabilidad a lo largo del tiempo.

Se debe resaltar que debe hacerse estadística en el aula. De ahí que sea muy importante plantear proyectos en los que los estudiantes tengan que recabar, organizar y presentar datos a sus pares. Del mismo modo, desde la perspectiva de quien recibe información estadística, deberá apoyarse en la formación del estudiantado en saber leer críticamente la información que sus pares expongan, y posteriormente toda aquella a la que estén expuestos; esto último, siempre en términos de tendencia, variabilidad, distribución, y del origen de los datos y los métodos usados para obtenerlos. La intención, como se dijo en la presentación de los estándares, es la de fomentar el pensamiento estadístico en lo tocante a la alfabetización estadística, el razonamiento probabilístico y la inferencia estadística, sea esta última informal o formal.

1. ¿Quién es el mejor piloto de la historia en la Fórmula Uno? Al final de la temporada 2002 se habló mucho al respecto: algunos sostuvieron que fue Juan Manuel Fangio y otros que Michael Schumacher. Aquí hay algunos datos que tal vez nos sirvan para decidirlo meramente sobre bases estadísticas, hasta la temporada 2002. Fangio corrió en la categoría entre 1950 y 1958, y no compitió en 1952. Compitió por ocho temporadas; corrió en cuatro diferentes equipos; participó en 51 carreras; su mejor temporada en puntos fue la de 1954, con 57.14 puntos acumulados; su mejor temporada en victorias fue la de 1954 con seis en un total de ocho carreras; ganó un total de 24 carreras, llegó diez veces en segundo lugar, una en tercero, seis en cuarto, ninguna en quinto, ninguna en sexto, y tres de séptimo hacia atrás; tuvo 29 arrancadas en la primera posición; acumuló 277.14 puntos en su carrera; corrió un total de 3383 vueltas; obtuvo cinco campeonatos del mundo, marca en la Fórmula Uno, compartida con Schumacher.

   Schumacher ha estado compitiendo en la categoría desde 1991, aunque en 1999 no corrió seis carreras, de las dieciséis de la temporada por una lesión. Ha competido en doce temporadas, incluida la del 2002; ha corrido en tres diferentes equipos; ha participado en 179 carreras; su mejor temporada en puntos ha sido la de 2002, con 144 puntos acumulados, marca en la Fórmula Uno; su mejor temporada en victorias ha sido la de 2002 con once en un total de diecisiete, marca en la Fórmula Uno; ha ganado un total de 64 carreras, marca en la Fórmula Uno, ha llegado 34 veces en segundo lugar, 16 en tercero, siete en cuarto, seis en quinto, cuatro en sexto, y cinco de séptimo hacia atrás; ha tenido 49 arrancadas en la primera posición; ha acumulado 945 puntos en su carrera, marca en la Fórmula Uno; ha corrido un total de 9733 vueltas; ha obtenido cinco campeonatos del mundo, marca en la Fórmula Uno, compartida con Fangio.

Con los datos anteriores, y dada la necesidad de sistematizarlos, puesto que la información es confusa, resuelvan lo siguiente:

a) Presenten los datos que se dan acerca de Fangio del modo en el que consideren más claro; pueden usar gráficos, tablas, promedios, porcentajes o lo que consideren pertinente.
b) Presenten los datos que se dan acerca de Schumacher del modo en el que consideren más claro; pueden usar gráficos, tablas, promedios, porcentajes o lo que consideren pertinente.
c) Presenten los datos de los dos pilotos de manera conjunta, de forma tal que pudiera decidirse quién es mejor de acuerdo a las estadísticas; pueden usar gráficos, tablas, promedios, porcentajes o lo que consideren pertinente.
d) Presenten los datos, o algunos de ellos, de manera que estadísticamente pudiera observarse que Fangio fue mejor que Schumacher; pueden usar gráficos, tablas, promedios, porcentajes o lo que consideren pertinente.
e) Presenten los datos, o algunos de ellos, de manera que estadísticamente pudiera observarse que Schumacher ha sido mejor que Fangio; pueden usar gráficos, tablas, promedios, porcentajes o lo que consideren pertinente.

2. Observa el siguiente gráfico ¿Qué nos dice en cuanto a población, muestra, variable y tendencia? ¿Las opciones que aparecen serán las únicas posibles?

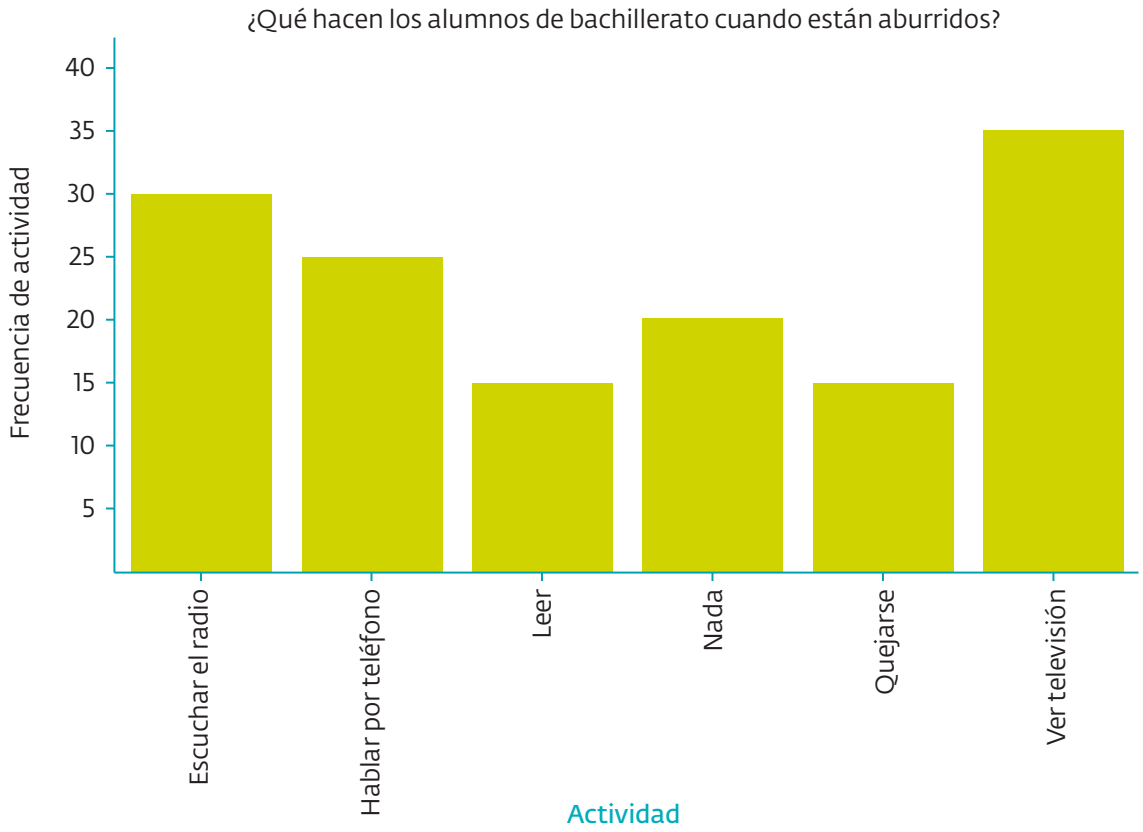


Figura 17

3. El delegado de Iztapalapa cuenta con presupuesto para ejercer este año y tiene la intención de mejorar la biblioteca más cercana a la delegación. Si se encuestara a un grupo de personas acerca de si la biblioteca pública debería ser ampliada, discute y contesta las siguientes preguntas:

   a) ¿Cómo se vería afectado el resultado si solo se encuestara a la gente que entrara o saliera de la biblioteca?
   b) ¿De qué forma podría realizarse esta misma encuesta, de modo tal que se tenga una idea clara de la opinión de los habitantes de la zona en la que se ubica la biblioteca?

4. Tres grupos de investigadores trabajaron con un mismo proyecto de investigación, pero obtuvieron distintos resultados. Estos estudios eran dirigidos a encontrar si los salarios para las mujeres en todo el mundo son o no iguales a los salarios de los hombres por el mismo trabajo, dentro de diferentes tipos de trabajos.

   Los resultados y la forma en la que se realizaron los estudios se muestran a continuación:

   Grupo de investigación 1: Concluyó que *Los salarios de las mujeres son iguales a los salarios de los hombres*.
   i) Los datos se recabaron solamente en América del Norte y Europa.
   ii) Hombres y mujeres dentro del mismo trabajo fueron seleccionados al azar para un solo tipo de trabajo: maestros.
   iii) El número total de personas que participaron en el estudio fue de 60, 30 hombres y 30 mujeres.

   Grupo de investigación 2: Concluyó que *Los salarios de las mujeres no son iguales a los salarios de los hombres*.
   i) Los datos se recabaron en América, Europa, Asia y África.
   ii) Hombres y mujeres dentro del mismo trabajo fueron seleccionados al azar para distintos tipos de trabajos, como profesores, controladores de vuelo, oficinistas, etcétera.
   iii) El número total de personas que participaron en el estudio fue de 6000, 3000 hombres y 3000 mujeres.

   Grupo de investigación 3: Concluyó que *Los salarios de las mujeres no son iguales a los salarios de los hombres*.
   i) Los datos se recabaron en América del Norte.
   ii) Hombres y mujeres dentro del mismo trabajo fueron seleccionados al azar para distintos tipos de trabajos, como profesores, controladores de vuelo, oficinistas, etcétera.
   iii) El número total de personas que participaron en el estudio fue de 3000, 1500 hombres y 1500 mujeres.

   a) Explica por qué los resultados en estos tres estudios fueron diferentes.

b) Después de ver los estudios y sus resultados, ¿puede afirmarse que las mujeres reciben el mismo salario que los hombres por el mismo trabajo, en el mundo? Justifica tus conclusiones.

5. En un estudio con 10 alumnos del primer curso se encontró que cada uno recibe de sus padres las siguientes cantidades por semana:

$100 $50 $200 $150 $50 $750 $0 $150 $100 $50

Utiliza estos datos para calcular los siguientes valores:

a) Media
b) Mediana
c) Moda
d) Amplitud
e) ¿Cuál de estos valores representa mejor los resultados del estudio? ¿Por qué?
f) Al valor $750 se le conoce como dato atípico. ¿Cuáles de los valores que calculaste en los incisos a), b), c) y d) serían los más afectados por el dato atípico?

6. A continuación de muestran los tiempos requeridos en la preparación de un huevo tibio, medidos en segundos:

145.508	154.398	140.834	145.955	156.542
15 0.16	135.295	143.886	161.401	143.535
149.994	160.515	158.971	135.874	150.397
140.664	139.029	136.582	149.046	152.038
141.044	155.414	158.968	150.689	140.518
147.48	157.516	143.852	142.71	143.958
143.866	144.001	161.025	157.484	151.714
166.166	150.963	139.204	141.54	150.319
148.73	154.433	139.32	153.828	158.652
154.448	139.942	151.393	157.09	138.381

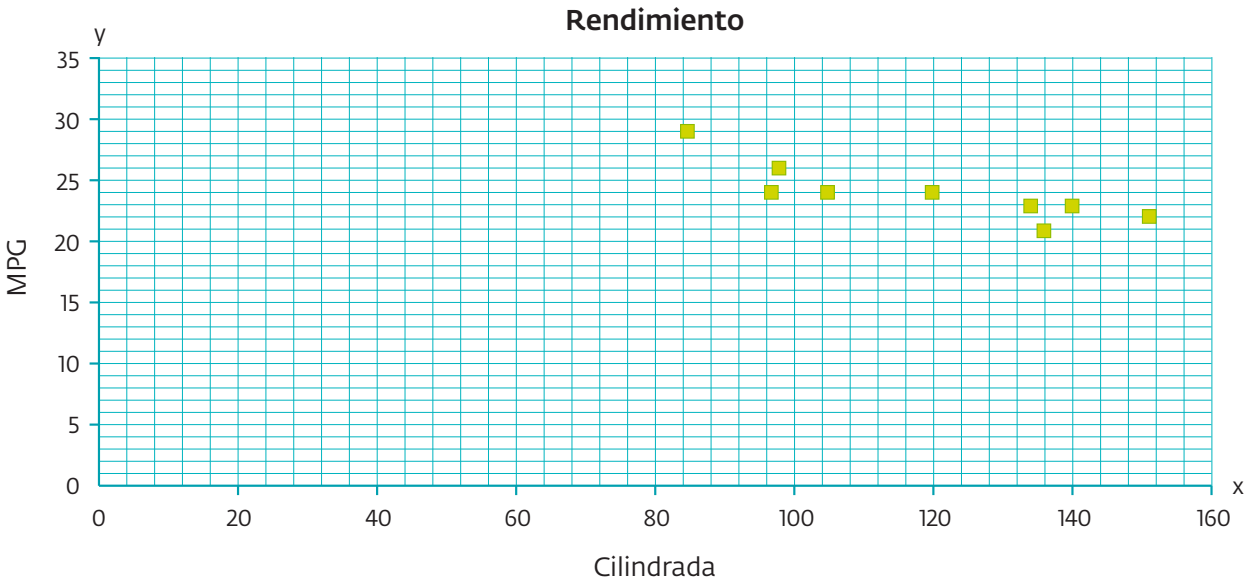
Tabla 3

a) Describe gráficamente la distribución de los tiempos, calcula la media y la desviación estándar.
b) Indica cuál sería el tiempo máximo de cocción sugerido para preparar un huevo tibio, dando la justificación estadística.

7. En la siguiente tabla se muestra la clasificación combinada del número de millas por galón y el volumen del motor para nueve automóviles subcompactos, con transmisión automática, de cuatro cilindros y que utilizan gasolina.

VEHICULO	CILINDRADA x	MPG (COMBINADO) y
VW Rabbit	97	24
Datsun 210	85	29
Chevette	98	26
Dodge Omni	105	24
Mazda 626	120	24
Oldsmobil Starfire	151	22
Mercury Capri	140	23
Toyota Celica	134	23
Datsun 810	136	21

Tabla 4



Gráfica 5

El tamaño del motor se da en pulgadas cúbicas totales de cilindrada. Encuentren la recta de mejor ajuste y trácenla sobre el diagrama de dispersión. ¿Cuál de los nueve vehículos sería la mejor opción de compra? Justifica tu respuesta en función tanto del diagrama de dispersión como de la recta de ajuste, así como de cualquier elemento ESTADÍSTICO adicional que consideres relevante.

8. Como toda ama de casa, Silvia tiene muchas tareas para cada día, así que trata de planear su tiempo lo mejor posible. Un punto que tomó en consideración para la mañana del lunes fue la tarea de sus dos hijas, ya que si ambas tienen trabajo para casa, entonces ella tendrá que ayudarles y ya no podrá disponer de tiempo en la tarde para todo lo que tiene que hacer. A lo largo del año escolar, se ha dado cuenta que la maestra de una de sus hijas les deja tarea generalmente siete de cada diez días, mientras que el profesor de su otra hija generalmente deja tarea nueve de cada diez días. Con estos datos, Silvia decidió tomar la mañana para todas sus labores, previendo que no tendría tiempo en la tarde. ¿Su decisión fue acertada? Da la justificación probabilística.

a) Después de que sus hijas se fueron a la escuela, ella se dedicó a sus labores domésticas, y después de terminar salió, pues debía ir a la clínica de odontología por un tratamiento, al mandado, a pagar el agua, y al banco que está en un centro comercial. ¿Cuántas alternativas de recorrido tuvo esa mañana?
b) Para su cita con el dentista, tomó en cuenta el número de pacientes que había observado que estaban antes que ella en sus últimas visitas: el 10% de las veces había solo un paciente, el 30% había dos pacientes, el 10% había tres, el 40% había cuatro, y el resto de las veces había seis. Como por cada paciente que esté antes, ella debe aguardar unos diez minutos, Silvia asumió que podía esperar que no estaría aguardando por más de media hora, aproximadamente, y usó esa idea para planear el resto de la mañana. ¿Su decisión fue la adecuada? Da la justificación probabilística.
c) En el centro comercial, ella pensó en buscar el regalo de cumpleaños de su pareja, de manera que tuvo que decidir entre ir a una bodega de ropa, o ir a los grandes almacenes. Ella sabía que podía encontrar fácilmente un paquete de tres camisas a buen precio en la bodega, pero también estaba consciente que en aproximadamente el 60% de las ocasiones, la ropa de las bodegas viene dañada o defectuosa, y en realidad no quería que ninguna de las tres prendas estuviera mal. Por otra parte, sabía que en los almacenes sería más difícil encontrar un buen regalo, pues anteriormente solo había encontrado algo de su agrado en el 20% de las veces que había entrado, y como tenía el tiempo medido, solo podía recorrer a lo más tres de los almacenes en busca del regalo. Aplicando lo que aprendió en clase de estadística y probabilidad cuando fue al CCH, ella tomó la decisión más acertada; ¿cuál fue esta decisión? Da la justificación probabilística.
d) Al terminar la mañana, Silvia debía ir por sus hijas a la escuela, y tenía dos alternativas: ir en coche o en el microbús. En el caso del coche, ella sabe que la zona escolar a la hora de salida es muy conflictiva para estacionarse; de hecho, sabe que el cajón de estacionamiento más cercano estaría a 400 metros de la puerta de la escuela y el más lejano 800, y sabe también que es igualmente probable encontrar un cajón a cualquier distancia entre esos 400 y 800 metros. En el caso del microbús, sabe que es poco probable tanto hacer poco tiempo de recorrido total como demasiado tiempo, y que es más probable hacer un tiempo de recorrido entre ambos extremos; de hecho, ella ya había medido a lo largo de varios días que en promedio haría un total de 45 minutos con una desviación estándar de 10 minutos. Dado que su día ha sido cansado, Silvia no estaría dispuesta a caminar más de 500 metros desde el cajón de estacionamiento a la escuela en caso de ir en el coche, pero tampoco desea tomar más de una hora de transporte público, pues aún tiene que llegar a darle de comer a sus hijas. De nuevo, utilizó lo que sabía de probabilidad para tomar la decisión más favorable; ¿cuál fue esta decisión? Da la justificación probabilística.

Tomar en cuenta que este tipo de decisiones se toman de manera cotidiana, pero sobre la base de la intuición o de la experiencia. Sin embargo, eso no significa que no sean decisiones tomadas bajo condiciones de azar. Lo que nos muestra esta serie de

problemas es que la Probabilidad nos permite sistematizar y fundamentar mejor nuestras decisiones bajo incertidumbre, y lidiar de mejor modo con el azar.

9. La PROFECO, (Procuraduría Federal del Consumidor) realiza pruebas en diferentes productos que compran los consumidores para corroborar las promesas que hacen los productores. Este mes se ha realizado un muestreo a las bebidas embotelladas de 500 ml.

   a) ¿Creen ustedes que el contenido sea en verdad exactamente lo que se ofrece?
   b) ¿Por qué sí o por qué no?
   c) Imaginen que son inspectores de la PROFECO. Su posición es la de demostrar que, en el mejor de los casos, la empresa cumple mínimamente con lo que ofrece, con respecto al contenido de jugo en las latas.¿Qué les interesaría verificar respecto al ofrecimiento en el contenido neto?
   d) ¿Cómo podrían usar estos resultados para comprobar el supuesto que como inspectores de la PROFECO les interesa presentar?
   e) El inspector de la PROFECO podría disponer de un equipo de ayudantes para tomar las mediciones; sin embargo, decide hacerlas todas él solo y con la ayuda de una única probeta. ¿Por qué consideran que se usó solo una probeta en esta investigación, y por qué consideran que todas las mediciones las hizo una sola persona?
   f) Con los datos obtenidos de las mediciones, planteen y comprueben la hipótesis del inspector de la PROFECO.

10. PROBLEMAS HISTÓRICOS DE PROBABILIDAD

    Si bien el origen de la probabilidad puede rastrearse hasta épocas muy antiguas, existe una amplia aceptación en señalar que éste, al menos en un nivel de formalización matemática, se encuentra en el intercambio de cartas entre Pascal y Fermat, en el siglo XVII. En este intercambio, Pascal presenta a Fermat una serie de problemas relacionados con juegos de azar, que a su vez fueron planteados a Pascal por un noble de la corte de Luis XIV conocido como el Caballero de Meré. Los problemas son los siguientes (ver Caballero, María Emilia. Aportaciones de Fermat a la teoría de la probabilidad. Miscelánea Matemática 34 (2001) 85-102, pp. 85-90. Sociedad Matemática Mexicana. México):

    a) *Primer problema de los puntos.-* Para ganar un juego, A debe sacar al menos un seis en ocho lanzamientos de un dado. La apuesta total, que llamaremos "la bolsa", se la lleva el jugador A si logra obtener el seis; en caso contrario, pierde la bolsa entera. El jugador A ya ha lanzado tres veces el dado sin obtener el seis deseado; si A decide no hacer el cuarto lanzamiento, ¿qué parte de la bolsa debe ser reintegrada a A por no hacer este lanzamiento?
    b) *Problema de proporcionalidad.-* En carta fechada el 29 de julio de 1654, Pascal escribe a Fermat: "No he tenido tiempo de pensar en un problema que inquieta a M. de Meré. Si usted puede resolver la dificultad sería perfecto. Chevalier de Meré

dice haber encontrado falsedad en la teoría de los números por la siguiente razón: 'Si me propongo obtener un seis en el lanzamiento de un dado, tengo ventaja si es en cuatro lanzamientos. Si me propongo obtener un doble seis con dos dados, tengo desventaja si es en 24 lanzamientos. Además 24 es a 36 como 4 es a 6. Ese es su gran escándalo…" De Meré, al ver que se cumple la proporción 4 es a 6 como 24 es a 36, asume que la probabilidad de ganar es la misma para los dos juegos, pero los resultados al jugar realmente muestran que en el primer caso se gana con más frecuencia y en el segundo se pierde con más frecuencia, lo que lo lleva a decir que hay falsedad en los números. Se sabe que Fermat explicó el por qué, aunque la carta en la que lo hace se desconoce. ¿Cuál es la explicación al hecho de que uno de los juegos sea favorable y el otro no? ¿Por qué el razonamiento del Caballero de Meré estaba equivocado?

c) *Segundo problema de los puntos*.- Un juego de pelota entre dos equipos consiste en alcanzar 60 puntos. Cada etapa del juego da a quien la gana 10 puntos, y 0 puntos a quien la pierde. La apuesta total es de 10 ducados. El juego debe interrumpirse y en ese momento el equipo A ha ganado 50 puntos y el equipo B tiene 20 puntos. ¿Cómo debe repartirse la bolsa de 10 ducados entre A y B de manera que la repartición sea justa?

Capítulo 5

Estrategias didácticas para mejorar el aprendizaje en el aula

Capítulo 5
Estrategias didácticas para mejorar el aprendizaje en el aula

5.1 ¿Qué es hacer matemáticas?

Definir qué es hacer matemáticas es complicado, sobre todo porque cualquier definición puede ser limitante a lo que es realmente y no específica de ninguna forma cómo este quehacer puede evolucionar en el futuro. De alguna forma sería más preciso decir que las matemáticas son lo que hace un matemático, definición tramposa que no nos dice mucho.

Tratemos, sin embargo, de hacer una descripción de lo que es hacer matemáticas, en términos generales, sin pretender que la descripción sea exhaustiva:

1. Reconocer si en un problema o situación problemática puede aplicarse un razonamiento lógico, cuantitativo o geométrico.
2. Considerar si se puede aplicar un conocimiento matemático previo a esta nueva situación.
3. En caso de que pueda aplicarse un conocimiento previo, revisar si los resultados son adecuados y congruentes con el problema planteado.
4. En caso de que no tenga aplicación inmediata o directa un conocimiento previo, intentar construir un desarrollo o idea nueva para atacarlo en relación con conocimientos matemáticos previos.
5. Una vez que se tenga una solución para el problema, buscar otros problemas o situaciones similares en donde se pueda aplicar el mismo procedimiento o idea.
6. Construir ejemplos donde la nueva idea tenga aplicación y resolver problemas con el nuevo conocimiento construido.
7. Abstraer el método o idea nueva de tal forma que pueda aplicarse a varios de los problemas, ejercicios o ejemplos construidos.
8. Generar una afirmación lógica aplicable en forma general a varios de los casos contemplados.
9. Dar argumentos convincentes o bien construir una demostración lógica de que la afirmación nueva tiene validez general con base en el cuerpo lógico matemático existente.
10. Aplicar la idea nueva a casos no considerados en principio.

Debe añadirse que el proceso no tiene una única forma de hacerse y que requiere voluntad, ingenio, creatividad y, sobre todo, mucho trabajo. El trabajo es lo que crea el ambiente

propicio para el avance del pensamiento matemático. Además, requiere de un estudio sostenido, comunicación con los pares, interés por muchos problemas y por solucionar una gran cantidad de ellos y reflexionar al respecto.

5.2 Estrategias didácticas

Independientemente del modelo pedagógico que cada docente decida seguir al preparar sus clases, existen algunos principios generales que se ha probado que son relevantes para el aprendizaje de las matemáticas. Estos principios están relacionados con acciones del docente para promover:

a) El pensamiento matemático.
b) Un clima de seguridad donde el estudiante pueda expresar sus ideas y dudas acerca de las matemáticas sin temor a ser criticado o agredido, y que permita mejorar su actitud hacia ellas.
c) Un contexto que facilite que el estudiante tenga atención selectiva a su objeto de estudio, y que sea capaz de visualizar cómo organiza su pensamiento para lograr comprensión de lo estudiado, así como que sea capaz de planear y evaluar sus procesos de pensamiento para aprender con efectividad.
d) Tareas de aprendizaje que lleven al estudiante a tener curiosidad intelectual por el tema, motivación para aprender a negociar y construir significado, integrando, modificando y desechando conocimientos previos, según sea necesario.
e) La retroalimentación oportuna y efectiva sobre los desempeños del estudiante, generando cuestionamientos que le permitan la reflexión.

Algunas recomendaciones concretas derivadas de investigación educativa se presentan a continuación:

1. Para aprender matemáticas es necesario hacer matemáticas. Ello implica que el estudiante enfrente problemas que representen un reto cognitivo, que permitan la activación de conocimiento previo y la necesidad de generar nuevos conocimientos (Stein, Silver y Smith, 2009/1998).
2. Una buena práctica es que los estudiantes se enfrenten a problemas y tareas que sean retadoras pero "logrables con esfuerzo" (Kyriacou, 2013). Es decir, es necesario que los estímulos (problemas, conceptos, etc.) que se presenten no sean demasiado difíciles ni demasiado fáciles, sino que impliquen un esfuerzo cognitivo sostenido (Siyepu, 2013).
3. Desarrollar en los estudiantes la capacidad de representar objetos matemáticos de diferentes maneras (gráfica, tabular, algebraica, modelaciones mediante "software", físicamente, etc.) y de poder relacionar esas diferentes representaciones con el objeto en sí y pasar de una representación a otra, comprendiendo el proceso (Ryve, Nilsson y Mason, 2011).
4. La intervención docente debe ser adaptativa al nivel de comprensión cambiante y dinámico de los estudiantes. Así, la idea es generar situaciones que pongan en conflicto cognitivo a los estudiantes de manera que sus soluciones propuestas alcancen niveles progresivamente más elevados de dominio de los contenidos. Para ello es posible pro-

mover, entre otros, el trabajo cooperativo entre pares, de modo tal que los estudiantes construyan su propio conocimiento (Simon, 1995).

5. Crear una comunidad de matemáticas promueve el aprendizaje (Hansen, Meshulam y Parker, 2013). Estudiantes identificados como en riesgo académico debido a sus puntajes en pruebas de matemáticas y antecedentes escolares se benefician de conocer los recursos de apoyo, de aprender técnicas de manejo de tiempo y de formar grupos de estudio con pares.
6. Promover una visión integrada del conocimiento matemático que esté relacionada con conceptos y objetos de otras disciplinas, de manera que la variación de contextos de los problemas potencie el pensamiento matemático y se logre la multidisciplinariedad, la interdisciplinariedad y podamos pensar en la transdisciplinariedad[3] (Hardré et al., 2013).
7. Es necesario identificar y generar intervenciones para reducir o eliminar la ansiedad hacia las matemáticas, llamada también cuantifobia, matefobia, fobia a las matemáticas y angustia relativa al aprendizaje de matemáticas (Goldberg y Waxman, 2003; Hilton, 1980; Pan &Tang, 2005; MALEI, 2006, todos en Iossi, 2013). Entre las herramientas y estrategias recomendadas están: el diagnóstico del problema y canalización del mismo, la comunicación efectiva con el estudiante, el uso de material manipulable o concreto, el uso de tecnología para estimular el avance al ritmo individual de cada uno y estrategias de autorregulación.
8. En la práctica docente se considera a la planeación y la evaluación de las actividades que se realizarán dentro y fuera del aula como herramientas potencialmente significativas, por lo que deberán llevarse a cabo de manera consciente, sistemática y estar en constante revisión, ajuste y autorregulación (Hudson Bailey, 2013).
9. Se ha visto que el desempeño académico en el área de matemáticas mejora cuando existe comprensión, reflexión o descubrimiento de estrategias mediadas por el docente (Boaler, 1998; Hollar &Norwood, 1999; Huntley *et al*., 2000;McCaffrey *et al*., 2003; Pressley, 1990; Renninger, Hidi&Krapp, 1992; Reys, Reys, Lapan, Holiday, &Wasman, 2003; Riordan &Noyce, 2001; Thompson & Senk, 2001, todos en Landry, 2012).
10. Schifter señala como áreas críticas de la formación de docentes de matemáticas: focalizarse en el pensamiento del estudiante al considerar lo que ellos hacen y dicen; apreciar y dar validez matemática a las ideas no estandarizadas de los estudiantes y concentrarse en los aspectos conceptuales que los estudiantes estén trabajando (2001 en Landry, 2012)
11. Es importante que los docentes no asuman que la autorregulación se da de forma espontánea. Es necesario generar intervenciones específicas dirigidas a que el estudiante sepa qué hacer y por qué hacerlo cuando enfrenta un problema o una tarea de aprendizaje (Landry, 2012).
12. La conexión entre aprendizaje de matemáticas y metacognición (término que se refiere a pensar sobre cómo pensamos) es robusta (Boekaerts, 1999; Flavell, 1979; Hodara, 2011; Pintrich, 2000; Schoenfeld, 2002, todos en Landry, 2012). El docente debe dedi-

3 En este contexto, cuando hablamos de **multidisciplina** nos referimos a la búsqueda de información en diferentes disciplinas, sin que se establezca una relación entre ellas. Nos referimos a **interdisciplina** cuando varias disciplinas abordan un objeto de estudio o problemática y cada una aporta elementos desde su ámbito para la comprensión. En la **transdisciplina** se borran los límites entre disciplinas específicas para integrarlas en un sistema único.

car tiempo real a que el estudiante reflexione sobre su aprendizaje, identifique estrategias exitosas, y planee y evalúe su trabajo cognitivo. Los estudiantes que carecen de conocimiento metacognitivo, es decir, que no identifican cuáles son sus recursos de pensamiento ni saben administrarlos con efectividad, no comprenden cuándo o por qué deben usar estrategias para aprender (de Boer, Donker-Bergst y Kostons, 2013).

13. El hecho de que los estudiantes tengan una sensación de éxito en su aprendizaje es relevante para su desempeño académico. Para lograrlo, se recomienda el trabajo en pequeños grupos donde el estudiante se sienta más seguro y menos expuesto y donde sea posible trabajar de manera efectiva la metacognición (Kyriacou, 2013).
14. Es importante usar propositivamente, y de acuerdo a la población y contenidos abordados, los diferentes niveles de conocimiento matemático. Ello implica identificar niveles de complejidad del contenido matemático. El nivel 1 se refiere al recuerdo de información como definiciones, hechos, términos o procedimientos simples. El nivel 2 (habilidad/concepto) implica involucrarse en procesamiento mental más allá de una respuesta habitual. Incluye decisiones que el estudiante debe hacer con respecto a cómo aproximarse al problema o actividad. El nivel 3 (pensamiento estratégico) supone razonar, planear, usar evidencia y un nivel superior de pensamiento. Un ejemplo es pedir al estudiante que justifique y explique su pensamiento en términos matemáticos. El nivel 4 (pensamiento extendido) requiere razonamiento profundo, planeación, desarrollo y pensamiento durante periodos prolongados de tiempo. Significa usar muchos recursos o análisis para lograr la respuesta. Supone conexiones múltiples y seleccionar un camino entre varios (Webb, 2009).
15. Es importante trabajar a nivel de grandes ideas, de habilidades y hechos básicos en el campo matemático (Koedinger y Roll, 2011; Lesh y Sriraman, 2012).

Capítulo 6

Evaluación en el aula

Capítulo 6
Evaluación en el aula

En este capítulo se abordará el tema de la evaluación desde la perspectiva de lo que sucede en el aula, a diferencia de la que hacen las instituciones educativas (escuelas y bachilleratos), instancias estatales (SEP y ANUIES) y organismos internacionales (UNESCO y OCDE) y que no tienen acceso directo a los procesos educativos que se dan dentro del salón de clase.

Debido a que el proceso de enseñanza-aprendizaje se lleva a cabo en una institución escolar, se hace necesario, al final de cualquier curso, tener algo tangible que informe a la institución, según el criterio del profesor, si el estudiante es apto para seguir con los cursos que vienen; es decir, es necesario contar con criterios que determinen si el estudiante acreditó un curso o no. Para este fin, se utilizan pruebas, exámenes o cuestionarios que arrojan un número que depende de la cantidad de respuestas correctas; tareas o asignaciones que el estudiante hace en casa y la participación del estudiante durante la clase. Con la ponderación conveniente, estos tres aspectos conforman la calificación que el estudiante obtiene al final del curso.

Dado el carácter de estas actividades se corre el riesgo de no obtener un número que represente el avance y el conocimiento del estudiante, aspectos que son difíciles de cuantificar por ser cuestiones que dependen de muchos factores.

En este tenor, la evaluación en el aula podría dar los elementos necesarios para la acreditación de los cursos y determinar si un estudiante puede continuar con cursos más avanzados.

6.1 El carácter de la evaluación

La evaluación en el aula debe ser un proceso continuo que arroja luz con respecto al aprendizaje del estudiante y su actitud ante las matemáticas, y debe servir para retroalimentar el criterio del profesor con información que le ayude a tomar decisiones sobre la marcha del curso. Dar información sobre el desempeño mismo del profesor y de las actividades de enseñanza que pone a sus estudiantes. Nunca debe tener carácter punitivo ni debe ser un momento aparte en las actividades de enseñanza-aprendizaje.

La principal meta de la educación matemática de nuestros estudiantes debe ser aprender matemáticas; por tanto, **la evaluación debe ser un proceso que apunte hacia el mejoramiento del proceso de enseñanza-aprendizaje como un todo** (en particular

el aprendizaje del estudiante). Las actividades de evaluación no deben ser distintas a las de aprendizaje y su objetivo debe ser mejorar las condiciones del curso con respecto a la actuación del profesor, al desempeño del estudiante y a la calidad de las actividades que se presenten. Finalmente, debe proporcionar los elementos necesarios para asentar una calificación al estudiante.

6.2 Tipos de evaluación

La evaluación en el aula se suele dividir en tres: diagnóstica, formativa y sumaria; a continuación las describimos.

La diagnóstica es aquella que da información sobre los conocimientos previos del estudiante. Tiene la intención de determinar si el estudiante posee los requisitos necesarios para iniciar el estudio de una cierta rama del conocimiento, una determinada unidad de aprendizaje o un curso. Habitualmente, este tipo de evaluación no tiene peso en la calificación del alumno.

La formativa informa sobre el progreso alcanzado por el estudiante. Es útil para identificar sus deficiencias durante el desarrollo de un tema, de una unidad temática o del curso completo y ayuda a valorar conductas del estudiante que dan evidencias del alcance de los objetivos propuestos. En ocasiones se le puede utilizar con fines de diagnóstico o de acreditación.

La sumaria (o sumativa) tiene como propósitos valorar la conducta o conductas finales que se observan en el educando al final del proceso; certificar que se han alcanzado los objetivos propuestos; hacer una recapitulación o integración de los contenidos de aprendizaje sobre los que se ha trabajado a lo largo de todo el curso e integrar en uno solo, los diferentes juicios de valor que se han emitido sobre una persona a través del curso. Este tipo de evaluación se usa para asignar una nota que indique si el estudiante acreditó o no un curso.

En el diagrama se presenta un resumen de los tipos de evaluación en el aula.

Diagrama 1. Tipos de evaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje

Por la forma de definirlas, la evaluación formativa puede traslaparse con la diagnóstica y la sumaria, pero no así la diagnóstica con la sumaria. Este hecho hace posible redefinir el concepto de evaluación en el aula. Pero antes de hacerlo revisemos algunas posturas sobre el tema.

6.3 Algunos antecedentes

En los textos *Balanced Assessment* (Balanced Assessment Project, 2000, p.vi) se establece lo siguiente:

Las evaluaciones en matemática nos dicen, a nosotros y a nuestros estudiantes, qué tan bien están aprendiendo matemática. Una evaluación en matemática diseñada cuidadosamente debe:

- *Evaluar la matemática que cuenta, poniendo la atención en las ideas y los procesos importantes.*
- *Ser justa con el estudiante, debe darle una serie de oportunidades de mostrar lo que saben y lo que pueden hacer.*
- *Ser justo con el currículo, debe ofrecer un conjunto equilibrado de oportunidades: tareas cortas, conocimiento básico y resolución de problemas, trabajo individual y en equipo, y el espectro de conceptos y procesos que reflejen la visión de los Estándares del NCTM.*
- *Tener una calidad tan alta que estudiantes y profesores aprendan de ella, de modo que el tiempo de evaluación sirva como tiempo de enseñanza y que evaluación y currículo vivan en armonía.*
- *Proporcionar información útil a los administradores, de manera que puedan juzgar la efectividad de sus programas; a los profesores, de modo que puedan juzgar la calidad de su instrucción y a los estudiantes y padres de familia, de manera que puedan ver en qué aspectos el estudiante tiene un buen desempeño y en cuáles se necesita invertir más trabajo.*

En el principio de evaluación de los Principios y Estándares para la Matemática Escolar del NCTM estadounidense (National Council of Teachers of Mathematics, 2000, pp. 22-24) se recomienda, para hacer una evaluación efectiva y justa, recabar la información útil de una diversidad de fuentes, entre las que se cuentan cuestionarios con preguntas abiertas, cuestionarios de opción múltiple, conversaciones, bitácoras o diarios y portafolios.

Por su parte, en el texto *Constructive Assessment in Mathematics* (Clarke, 1997) se da la siguiente caracterización de evaluación constructiva:

Para un profesor, la evaluación es un proceso en el cual recabamos evidencias, hacemos inferencias, llegamos a conclusiones y actuamos con base en dichas conclusiones. La evaluación es constructiva cuando el foco de atención de cada etapa de tal proceso es el aprendizaje matemático del estudiante. En resumen, la evaluación es constructiva cuando ayuda a fomentar el aprendizaje del estudiante.

Para un estudiante, la evaluación es una oportunidad de mostrar su entendimiento y sus habilidades matemáticas. Además, es una conversación con el profesor sobre lo que se ha aprendido y lo que aún no está claro, y sobre lo que ayudó y lo que no ayudó al aprendizaje del estudiante. Desde el punto de vista del estudiante la evaluación se vuelve constructiva cuando le da valor a lo que ya puede hacer, y le ayuda a aprender lo que todavía no hace. (pp. 2-3)

Finalmente la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico, en su programa de evaluación PISA (OCDE, 2006), adopta un planteamiento amplio de la evaluación del conocimiento y de las habilidades que reflejan los cambios actuales en los programas de estudio, pasando de un planteamiento basado en la escuela a un planteamiento basado en el uso del conocimiento en actividades y retos cotidianos. Tales habilidades reflejan la capacidad de los estudiantes para continuar aprendiendo durante toda su vida, aplicando lo que aprendieron en la escuela en contextos no escolares.

6.4 La evaluación en el aula

Con el propósito de que la evaluación sirva para fomentar el conocimiento matemático del estudiante y para que sea realmente significativa, debería ser parte integral del proceso. Por consiguiente, el mismo tipo de actividades que se utilizan para enseñar un concepto servirían para evaluar el desempeño del estudiante y del profesor y la calidad del curso; serviría también para acreditarlo.

En consecuencia, la evaluación en el aula tiene dos propósitos:

- **Evaluación formativa con fines de retroalimentación.** La evaluación como parte integrante de la rutina del aula. El maestro debe llevar a cabo las actividades de enseñanza tomando en cuenta la dificultad que tienen para el estudiante, la actitud del estudiante para con ellas, y qué tanto ponen en juego el conocimiento que se pretende enseñar. El objetivo de esta observación es recabar información suficiente para tomar decisiones sobre el curso, el carácter de las actividades y la ayuda que se le puede ofrecer al estudiante. Aquí cabe la evaluación diagnóstica.
- **Evaluación sumaria con fines de acreditación**. Las actividades en el aula deben ser variadas y se pueden escoger las más significativas para determinar una calificación (entre estas actividades puede haber cuestionarios); a esto se le sumarían la asistencia del estudiante y sus actitudes personales para con las matemática como interés, participación, perseverancia en la resolución de problemas, entre otras. El profesor debe

determinar qué porcentaje de la calificación se le dará a cada aspecto. En este contexto, el cuestionario vendría a ser una actividad de enseñanza más.

Este concepto de evaluación en el aula se resume en el siguiente diagrama.

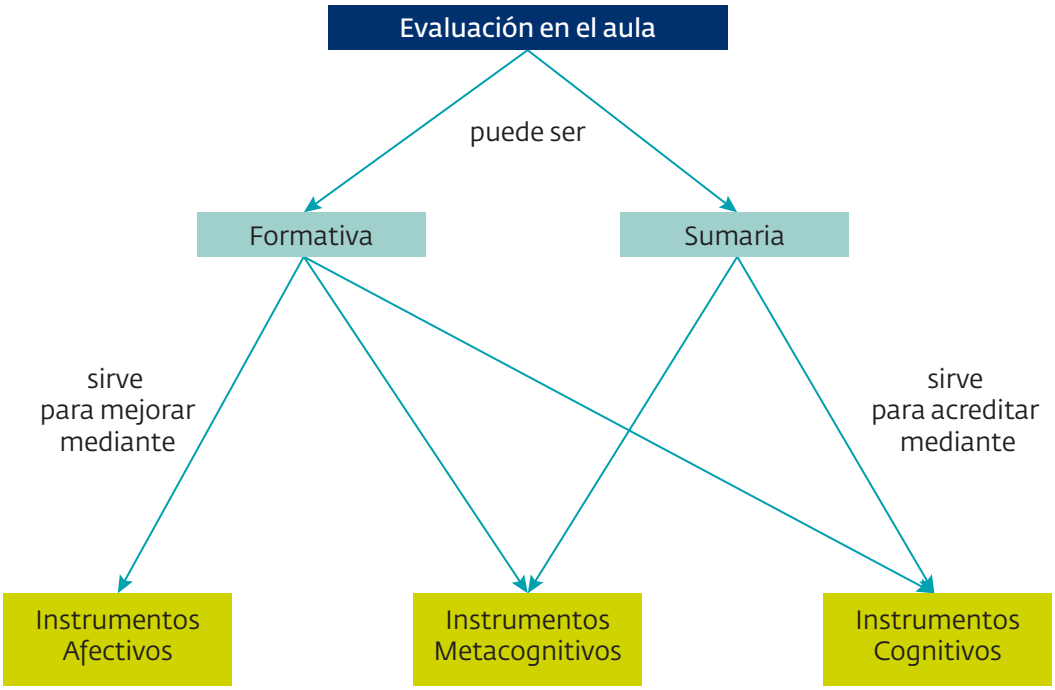


Diagrama 2. Reconcepción de la Evaluación en el Área

Esto significa que la Evaluación en el Aula tiene como propósito obtener información sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje con el propósito de mejorarlo mediante la retroalimentación; además, sirve para recopilar evidencias que indican al profesor si el estudiante merece acreditar el curso o la materia.

El aspecto formativo de la evaluación ayudaría a mejorar el desempeño del estudiante, el desempeño del profesor, la efectividad y la calidad de las actividades de enseñanza-aprendizaje propuestas, y la pertinencia del currículo; además de servir como criterio para determinar la calificación del curso. De ahí la importancia que adquiere frente al mero uso de la evaluación con fines de acreditación.

Finalmente, aunque el uso de cuestionarios como instrumentos de evaluación tiene limitaciones, su uso como un instrumento de enseñanza-aprendizaje tiene cualidades que el profesor puede aprovechar plenamente, siempre y cuando se les utilice en el marco de una evaluación formativa y no con el solo fin de determinar la acreditación o no de un curso. En este contexto, se potenciaría su capacidad como instrumentos de enseñanza-aprendizaje.

Capítulo 7

Formación y actualización de profesores

Capítulo 7
Formación y actualización de profesores

La formación permanente de los docentes se ha vuelto un tema importante para las instituciones educativas y para los gobiernos, ya que se considera al profesor como uno de los ejes centrales del proceso formativo.

En 2011, la UNESCO, a través de su "Red Nacional de Expertos en Políticas Docentes, Proyecto Regional UNESCO" elaboró un documento denominado *Estado del arte sobre políticas docentes en América Latina y el Caribe* donde da cuenta de los aspectos que recubren el desempeño profesional de los docentes, así como el entramado de sus condiciones laborales en la región de América Latina y el Caribe.

En nuestro país, auspiciado por la SEP y la Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Enseñanza Superior (ANUIES), en 2008 se echó a andar el Programa de Formación Docente en Educación Media Superior (Profordems). Este programa tiene como objetivo general "desarrollar las competencias docentes que se requieren para generar el perfil de los estudiantes egresados de la Educación Media Superior (EMS) (Estrategia 13.1 del Plan Nacional de Desarrollo 2007-2012). Mientras que como objetivos específicos se plantean los siguientes:

- Establecer un programa nacional de formación y actualización docente.
- Generar el perfil del docente requerido para desarrollar el perfil de egresado especificado en la Reforma Integral de la Educación Media Superior.

El Profordems ofrece dos opciones de actualización y formación:

- Diplomado en Competencias Docentes en el Nivel Medio Superior (200 horas) diseñado e impartido por la ANUIES.
- Especialidad en Competencias Docentes en el NMS que se imparte en línea por la UPN y tiene una duración de 216 horas.

Por su parte, en la UNAM se han llevado a cabo esfuerzos importantes en formación como el Programa de Apoyo a la Actualización del Personal Docente del Bachillerato (PAAS), (1993-1999), el Programa de Fortalecimiento del Bachillerato (PFB), (2004-2010),

la readecuación de la infraestructura que realizó el Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) para reducir de 50 a 25 el número de estudiantes por profesor en el área de matemáticas (2007), y el Programa de Actualización y Superación Docente (PASD) que realiza la Dirección General de Asuntos de Personal Académico (DGAPA) desde hace varios años.

Sin embargo, pese a estos esfuerzos, la mejora en los resultados de los estudiantes en matemáticas no ha sido significativa, lo cual lleva a pensar que los modelos de actualización, vía cursos y diplomados tradicionales, no han tenido los resultados esperados. Para lograr un mejoramiento de esta importante labor, se deben diseñar los mecanismos que propicien la participación activa y permanente de los profesores y sean ellos mismos, los elementos generadores del proceso de actualización y formación. Este mecanismo debe tener la capacidad de incorporar oportunamente los avances de la investigación educativa en el aula.

Por tanto, se propone un **Programa de Formación de Profesores de Matemáticas** cuyo principal objetivo es desarrollar y fomentar aquellos aspectos de la Cultura Matemática que competen directamente a su quehacer docente.

El modelo pedagógico de formación de profesores que se propone toma en cuenta una enseñanza de las matemáticas centradas en el estudiante y su aprendizaje en la que el profesor debe tener la preparación suficiente para tomar decisiones informadas sobre la manera de planear, dirigir y evaluar su docencia.

En consecuencia, consideramos que el profesor debería ser un profesional reflexivo sobre su propia práctica docente y capaz de retroalimentar dicha práctica para mejorarla; concibe el aula y el ambiente que en ella se forma como un reflejo de la sociedad en la que estamos inmersos y por lo tanto crea una conciencia social a partir de su desempeño docente. Privilegia el trabajo cooperativo sobre el individual, debe estar comprometido con su profesión y ser capaz de plantear y resolver los problemas docentes con base en una investigación educativa desarrollada por él mismo o por otros colegas. Esto es lo que denominamos Competencia Docente e incluye, además, todos aquellos elementos pedagógicos y didácticos que propicien la adquisición de la Cultura Matemática de los estudiantes.

Ahora bien, el enfoque de enseñanza que se propone se basa, principalmente, en la resolución de problemas y el planteamiento de situaciones didácticas en las cuales sea el propio estudiante quien haga y vaya construyendo las matemáticas que la institución pretende que aprenda. Para ello, el profesor debería reflexionar sobre su misma práctica docente y el papel que da en ella al estudiante; sobre la calidad de las situaciones didácticas en la que involucra a sus estudiantes y la motivación que propicia. Este enfoque debería propiciar una visión integral de las matemáticas y sus conexiones con otras ciencias, dándole un carácter multidisciplinario y reconocer los factores que inciden en el desarrollo de las matemáticas.

La formación de profesores de matemáticas se centraría en la reflexión sobre experiencias que modelan implícitamente el enfoque de enseñanza que se quiere impulsar, sobre la propia práctica y sobre las producciones de los alumnos. Esto permite, en diferentes instancias de trabajo, ir de la motivación a la reflexión, de la reflexión a la innovación y de ésta a la apropiación de una concepción didáctica para la enseñanza de las matemáticas; todo en un marco de evaluación formativa.

Se considera, también, que toda estrategia de formación de profesores debe plantearse como una tarea permanente que asegure la apropiación de conocimientos por parte del profesor y la transformación real de su práctica docente. Asimismo, debe incorporar el punto de vista de los profesores, su experiencia y su identificación de problemas y aciertos en la enseñanza de las matemáticas.

Otro aspecto que adquiere importancia en la formación permanente de profesores es el desarrollo de su capacidad para identificar problemas de aprendizaje en sus estudiantes; plantearlos en el marco de un trabajo cooperativo, como hipótesis de trabajo o como problemas de investigación. Por tanto, se debe contemplar la formación de profesores-investigadores (dirigida, principalmente, a los profesores de carrera).

Los detalles y la puesta en marcha del programa, así como sus planteamientos académicos específicos, estarán a cargo del Seminario Universitario para la Mejora de la Educación Matemática en la UNAM, el cual se describe en el capítulo 10.

Capítulo 8

Participación del área de gestión en el mejoramiento de la educación matemática

Capítulo 8
Participación del área de gestión en el mejoramiento de la educación matemática

Para llevar a cabo su misión educativa, una institución requiere esencialmente de una planta académica comprometida y competente, de planes y programas de estudio adecuados y actualizados, de recursos para su puesta en práctica y de alumnos con disposición para aprender.

Asimismo, es necesario contar con políticas y condiciones materiales y organizacionales, que permitan el desarrollo cotidiano de las actividades académicas. Establecer mecanismos para atender las múltiples necesidades y problemas que se derivan de éstas, así como procedimientos de evaluación orientados a su detección, a la toma de decisiones y a la mejora en el cumplimiento de sus funciones en el nivel individual, grupal e institucional.

La atención de los aspectos mencionados en el párrafo anterior corresponde al área de gestión, ámbito que va mucho más allá de la limitada concepción que con frecuencia se tiene de ella, en tanto que abarca diversos procesos, desde la dirección hasta el suministro de servicios, que son fundamentales para el adecuado funcionamiento y el éxito de toda institución educativa.

Esta área adquiere particular relevancia en procesos de revisión y modificación de los procesos de enseñanza y de aprendizaje, que si bien en la UNAM tienen su origen y son conducidos desde la academia, requieren para su desarrollo y consolidación de una gestión comprometida y dispuesta a apoyar los cambios que se requieran.

Es así que la participación del área de gestión en el Seminario Universitario para la Mejora de la Educación Matemática (SUMEM) es determinante, ya que el bachillerato de la UNAM involucra a un número de profesores de matemáticas que fluctúa entre 850 y 900 (alrededor del 60% son del CCH) Según los datos aportados por estas entidades; los que imparten una o más de las aproximadamente 15 asignaturas de matemáticas que cursan los más de 100 000 alumnos de este nivel educativo de la UNAM.

La Escuela Nacional Preparatoria y el Colegio de Ciencias y Humanidades tienen estructuras y procedimientos de gestión que les son particulares, y desde ellas han generado iniciativas propias para contribuir a resolver las dificultades del aprendizaje de las matemáticas: problema a nivel mundial que ya ha sido abordado en capítulos anteriores.

Sin embargo, en el marco del SUMEM, tomando en cuenta la revisión de las medidas adoptadas por diversos países para mejorar sus resultados educativos, el Equipo IV del GTMEM se planteó la necesidad de presentar algunas consideraciones en cinco ámbitos que competen al área de gestión:

- La selección de profesores de nuevo ingreso.
- Las condiciones de los profesores en servicio.
- Las funciones de los profesores.
- La estructura, los recursos y los programas de apoyo académico.
- La planeación y la evaluación de las actividades académicas.
- La cultura y el clima institucional.

8.1 Selección de profesores de nuevo ingreso

Como se mencionó en el Capítulo I, en países como Corea del Sur, Finlandia y Chile, una estrategia fundamental para mejorar la educación ha sido atraer, seleccionar, formar y conservar a los mejores candidatos y docentes.

En la ENP y el CCH están normados el ingreso, la promoción y la permanencia de los profesores, y se hacen esfuerzos importantes en su selección y formación inicial.

Quienes aspiran a dar clases en el bachillerato de la UNAM deben contar con una licenciatura de acuerdo con el perfil profesiográfico de la asignatura a impartir, haber obtenido un promedio mínimo de 8.0 y obtener un dictamen favorable en las pruebas de conocimientos, disposición para la docencia. En el caso de la ENP también se aplican pruebas psicométricas.

En matemáticas, la mayoría de los candidatos son egresados de las carreras de Ingeniería de la UNAM y el porcentaje con estudios de maestría es menor que 30%.

En la entrevista personal a los aspirantes de docencia en el área de las Ciencias Físico Matemáticas de la ENP, prácticamente el 100% contesta que la docencia es su vocación o primera elección de trabajo; más de la mitad de quienes ya habían dado clases estaban interesados en dedicarse a ella por completo o parcialmente. Las causas citadas para este interés fueron el reto y la satisfacción de que sus alumnos aprendieran. En cuanto a solicitar su ingreso al bachillerato de la UNAM, la mayoría consideraba ventajoso la posibilidad de realizar estudios de posgrado y la oportunidad de una carrera académica.

La ENP y el CCH tienen programas de inducción, de formación inicial y de seguimiento de sus profesores de reciente ingreso. Sin embargo, hay dos situaciones que obstaculizan el éxito de estos programas.

En primer lugar, los profesores de nuevo ingreso, en su mayoría, trabajan en otras instituciones educativas y son contratados por horas por la UNAM, con un salario inicial muy bajo y para cubrir vacantes temporales, situación que puede prolongarse varios años.

En segundo lugar, la falta de apoyo y de recursos, al igual que la falta de una evaluación y seguimiento sistemático, impiden fortalecer el desarrollo de profesores tanto de asignatura como de primer ingreso, que son los que atienden a la mayor cantidad de alumnos del bachillerato. Por ejemplo, en los primeros años los profesores requieren desarrollar la habilidad de trasposición didáctica del conocimiento, para la comunicación y el trabajo

con adolescentes, de manera colaborativa y, sobre todo, reflexiva. Esta tarea requiere de preparar a los formadores de profesores y de recursos definidos con los que en general no se cuenta.

Así, después de los cursos de los programas de inducción, la mayoría de los profesores de ingreso reciente, periodo que puede variar de dos a cinco años, se encuentran con apoyos limitados y, sobre todo, sin seguimiento específico para detectar de manera oportuna problemas en su formación y su desempeño.

¿Qué tan adecuada es su práctica docente?, ¿qué requieren para mejorarla? ¿Enfrentan las mismas dificultades que otros profesores? ¿Cómo se comportan en un sistema universitario que asume para su buen funcionamiento el compromiso y la responsabilidad de sus académicos y tiene menor control que otras instituciones educativas y niveles? Aunque en general se aprecia disposición a ganarse un lugar en la institución mediante un desempeño responsable, la apreciación de una mayor permisividad puede afectar las expectativas futuras de los profesores, en cuanto a obligaciones y responsabilidades con ésta.

En este sentido, el SUMEM representa una oportunidad para revisar, apoyar y enriquecer con la experiencia y recursos de las entidades participantes la normatividad, las políticas y los procesos de reclutamiento, selección, promoción y evaluación de aspirantes y de profesores de reciente ingreso, de manera que se cuente con una planta docente que desde su ingreso posea cualidades relacionadas con una enseñanza exitosa en el bachillerato. Que a su vez participe en actividades y colabore con grupos que contribuyan a reforzar una cultura universitaria responsable y comprometida.

En particular, es importante revisar y, en su caso, redefinir el perfil profesiográfico, de manera que sea acorde al manejo de la disciplina, la metodología de enseñanza y los principios educativos institucionales.

8.2 Las funciones de los profesores de tiempo completo

Tener una plaza de tiempo completo en el bachillerato de la UNAM es un privilegio en muchos sentidos. No es común, a nivel nacional e internacional, que se cuente con plazas de este tipo en el nivel medio superior, por lo tanto constituye una oportunidad para la profesionalización de los docentes de bachillerato; tanto por las facilidades para prepararse en este campo, como por el ejercicio de la docencia en un ambiente universitario.

En la práctica, la fuente con que se cuenta para conocer y analizar el trabajo de los académicos de tiempo completo, lo constituyen sus informes y los expedientes que integran para su promoción o para la participación en programas de estímulos. En ellos es evidente su dedicación, la que se concreta en infinidad de actividades, materiales y colaboraciones, sin duda alguna, muchas de ellas de gran valía para la entidad.

También es cierto que la mayoría de estas aportaciones no son evaluadas adecuadamente (sólo se coteja o cuantifica), no se les da seguimiento y no se consolidan, ni se difunden. No se aplican efectivamente y no hay evidencia de que lleguen a mejorar concretamente las prácticas docentes de la entidad.

Por ejemplo, no se tiene información sobre la formación de cuadros de expertos y especialistas en docencia, en diseño y evaluación curricular o en la elaboración de materiales

didácticos. No se generan estudios e investigaciones que sustenten innovaciones y no ocurre un mejoramiento general de la enseñanza en el bachillerato.

Con el propósito de que los múltiples esfuerzos que cotidianamente se realizan puedan concretarse en mejores resultados, será conveniente revisar o instalar procedimientos para la adecuada valoración y recuperación del trabajo de los profesores de tiempo completo, así como analizar su reorientación hacia áreas prioritarias para las entidades.

Cabe señalar que hay profesores que aun cuando no tienen una plaza de tiempo completo, laboran 40 horas frente a grupo en la UNAM y llegan a tener más de medio millar de alumnos, situación que no puede considerarse idónea desde el punto de vista de los procesos de enseñanza-aprendizaje. El número de alumnos o grupos que un profesor puede atender es un aspecto que merece análisis desde diferentes vertientes.

8.3 La estructura, los recursos y los programas de apoyo académico

El rigor en la demanda del cumplimiento de responsabilidades y la tendencia a la mejora debe estar acompañado de los apoyos pertinentes. Si se quiere que los profesores pongan en marcha prácticas acordes con las nuevas taxonomías de aprendizaje o que apliquen las TIC, éstos deben contar con la preparación y con los recursos indispensables, en la medida que lo permitan los medios de la institución.

Los avances en la comprensión del aprendizaje escolar, los nuevos contenidos curriculares, así como las modificaciones en la percepción de las finalidades de la escuela y de las funciones del profesor, han llevado a superar la idea de que la enseñanza consiste en la simple transmisión de conocimientos y que la posesión de éstos es el único requisito para enseñar y para que los alumnos aprendan.

En consecuencia, además de los apoyos básicos para la formación y actualización de profesores, éstos deben contar con los medios y los materiales para desarrollar una docencia que atienda a los retos de aprendizaje y aproveche los nuevos recursos, sobre todo tecnológicos, para la enseñanza.

En el caso de la formación y actualización de profesores es importante considerar el nivel de estudios, la antigüedad y hasta la edad de los profesores de matemáticas, así como los apoyos que requieren para mejorar su práctica. De acuerdo con los datos aportados por las entidades de bachillerato, en la ENP menos del 20% tiene estudios de posgrado, menos del 20% son de tiempo completo y la edad promedio es de 50 años.

En el CCH, el 22% son de tiempo completo. De los profesores de asignatura, el 70% son interinos y el 15% son de reciente ingreso con hasta dos años de antigüedad. La edad promedio es un poco menor que en la ENP: 47.25 años, y la antigüedad promedio es de 15 años y medio. Como ya se mencionó, es común en ambos subsistemas que los profesores se incorporen sin contar con una preparación específica para la enseñanza.

Por las razones ya mencionadas en este apartado, el que los profesores de asignatura que constituyen la mayoría de la planta docente puedan aprovechar las acciones de formación y actualización de profesores que se proponen en el Capítulo 7, requiere del apoyo de políticas institucionales y de recursos. Sobre todo en el caso del apoyo requerido

por los profesores de reciente ingreso habría que pensar en algún tipo de estímulo, incluso económico, para favorecer la participación en actividades específicas de formación de aproximadamente 500 profesores con una antigüedad no mayor de 5 años y hasta 15 horas adscritas a la entidad, según el Registro Único de Personal Académico (RUPA), de la Dirección General de Asuntos del Personal Académico.

Por otra parte, la propuesta del Capítulo 10 sobre un seminario permanente en el que participen académicos de diversas entidades en la formación de profesores, la actualización curricular y el desarrollo de estrategias y recursos para mejorar el aprendizaje de las matemáticas en el aula, ofrece una alternativa para complementar ofertas de formación más tradicionales.

Esta propuesta recurre al enfoque de comunidades de práctica, contemplado en el Plan de Desarrollo de la UNAM para el periodo 2011-2015, que se basan en una metodología participativa con la que los profesores pueden desarrollar capacidades para la indagación, la comunicación y la investigación, así como para expresar y argumentar correctamente sus ideas, el trabajo colaborativo y para reflexionar sobre su práctica docente; todo esto acompañado de los mejores profesores e investigadores de la UNAM.

Con el soporte necesario, el seminario puede ser la simiente de una red de apoyo institucional, nacional e internacional para el mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas.

También se requiere de personal contratado específicamente para realizar funciones de coordinación, orientación y supervisión del trabajo de profesores. En este ámbito hay insuficiencias cuya atención no se limita a la creación de plazas, sino que requiere la revisión de las funciones, así como priorizar los problemas a atender y los apoyos y servicios a proporcionar.

8.4 Planeación y evaluación de las actividades académicas

La institución tiene que tener claridad y comunicar de manera inequívoca lo que requiere de sus profesores para mejorar la preparación que brinda a sus alumnos y alcanzar el perfil deseable de egreso. Asimismo, de seguir siendo una opción educativa innovadora con capacidad para la formación de alumnos a la altura de las demandas del nuevo milenio. Igualmente indispensable resulta que cuente con elementos para conocer el cumplimiento y el logro de sus metas.

La UNAM está haciendo esfuerzos muy grandes para avanzar en las áreas de planeación y evaluación. Basta mencionar la creación de la Coordinación de Planeación, Presupuestación y Evaluación, y del Consejo de Evaluación Educativa, que, en su momento, normará y evaluará este proyecto.

La ENP y el CCH han avanzado en orientar la planeación de las actividades académicas de sus profesores a partir de prioridades institucionales, pero es necesario seguir fomentándola, así como encaminar los procesos de evaluación para que los estímulos y reconocimientos se otorguen desde esta perspectiva, más que por reportar actividades sin considerar su calidad y trascendencia.

Un aspecto que habría que considerar en cuanto a la evaluación es la responsabilidad docente en el aprendizaje. Los procesos de enseñanza y aprendizaje son complejos al estar

influidos por factores de muy diversa naturaleza, algunos externos como son los socioeconómicos, culturales y familiares, y otros propios de la institución, entre los que están los planes y programas de estudio, la infraestructura y los recursos.

Sin embargo, la experiencia de nuestra universidad y la literatura especializada coinciden en que, independientemente de los aspectos señalados, así como de corrientes pedagógicas, disciplinas e incluso niveles educativos, el profesor es determinante en el aprendizaje de los alumnos. Lo anterior en el sentido de que una enseñanza que se caracteriza por ser una actividad intencional, sistemática, organizada, reflexiva y formativa para el propio docente, tiene mayores probabilidades de éxito.

La responsabilidad del profesor consiste en preparar sus clases, estar al tanto de innovaciones en la enseñanza de su disciplina, identificar situaciones que puedan incidir positiva o negativamente en el aprendizaje y de canalizarlas adecuadamente. Se debe exigir al mismo tiempo que se le reconozca en los procesos de promoción y de otorgamiento de estímulos y reconocimientos.

En el ámbito de la gestión se tienen además otras dos consideraciones. En primer término, la conveniencia de contar con un sistema homogéneo de indicadores, de formatos y de bases para las entidades de bachillerato, que incluyan aspectos cualitativos y permitan analizar de mejor manera el cumplimiento, los problemas y los éxitos. En segundo, incorporar a las TIC en los procesos de evaluación y seguimiento, tanto a nivel individual como colegiado o de la entidad.

En el caso del proyecto, la evaluación periódica es esencial para su desarrollo, por lo que deberá ser parte de la logística del mismo.

La incorporación de las TIC en los procesos de planeación, evaluación y seguimiento, permitirá agilizar, sistematizar y hacer más confiable la información de que se disponga.

Por último, es conveniente revisar programas como PAPIME, INFOCAB, PASD y PRIDE, que constituyen un apoyo de gran valía para la investigación y la innovación educativa.

8.5 Cultura y clima institucionales

Son factores que favorecen u obstaculizan el logro de la misión educativa y que se manifiestan en el cumplimiento de responsabilidades, en la satisfacción y el sentido de pertenencia a la institución y, de manera importante, en la calidad de la educación que se brinda. En la cultura y el clima de la entidad y plantel influyen el estilo de liderazgo y la comunicación; funciones que corresponden sobre todo a la dirección. Por ello, es importante generar ambientes que propicien una vida colegiada intensa, productiva y de calidad.

Es importante destacar la relevancia de este aspecto en el caso de los profesores de reciente ingreso. Al igual que se valoran los procesos de inducción de los alumnos de primer ingreso, es importante hacerlo con los profesores de incorporación reciente a la institución para que se apropien de los principios educativos y éticos de la UNAM, del modelo educativo de la entidad y de la metodología de enseñanza que se propone para la disciplina que imparten.

Los primeros años son determinantes en el tipo de relación que se establecerá con la entidad, por lo que es conveniente que estos profesores estén bajo la tutela de profesores

de reconocido prestigio, que fomenten en ellos desde el principio el sentido de pertenencia, orgullo y compromiso institucional, sobre todo con el aprendizaje de los alumnos.

En síntesis, en cuanto a la gestión se propone mejorar los procesos de selección y las condiciones de los profesores de reciente ingreso, revisar las funciones de los profesores de tiempo completo, estimular y apoyar acciones de formación que atiendan de mejor manera las características de los profesores a los que van dirigidas. Tener como referente el perfil del egresado que se desea en la planeación y evaluación de las actividades académicas, propiciar un clima de colaboración, superación académica y de compromiso con la institución.

Vale la pena aclarar que no se desconoce el esfuerzo de la UNAM y de sus entidades de bachillerato por solucionar o paliar las situaciones mencionadas, y que no se piensa en solucionarlas a través del proyecto, pero no citarlas sería omitir aspectos que, de no considerarse, ponen en riesgo el logro de sus propósitos y se pierde una oportunidad para que puedan ser atendidas.

Capítulo 9

Difusión y promoción de la Cultura Matemática

Capítulo 9
Difusión y promoción de la Cultura Matemática

El SUMEM tiene entre sus objetivos mejorar la percepción y la actitud hacia las matemáticas y hacia el trabajo profesional derivado de su práctica en la comunidad de la UNAM.

Es bastante conocido el rechazo que, en general, se tiene hacia las matemáticas. Se sabe que son importantes a pesar de que, casi nadie, puede explicar por qué o para qué. Al mismo tiempo, se le califican mediante lugares comunes como "difíciles" y "aburridas". Queda claro que el panorama de las matemáticas visto de esta manera, no es muy alentador y existe una necesidad en nuestro país por modificarlo.

Gran parte de la visión anterior se debe, por un lado, a experiencias escolares que impiden la comprensión de los conceptos matemáticos y que, en muchos casos, generan un rechazo hacia la ciencia que parcializa su percepción por parte de los estudiantes. Por otro lado, en la vida cotidiana no es frecuente encontrar oportunidades de conocer mejor las matemáticas para poder aceptarlas y valorarlas en su justa dimensión.

En prácticamente todos los países del mundo el proceso de enseñanza-aprendizaje y la generación de una Cultura Matemática entre la sociedad presentan serios problemas. México no es la excepción, aparece en los últimos lugares de la prueba PISA y los indicadores de la prueba ENLACE demuestran que uno de los problemas más serios a los que se enfrenta la educación básica es la evolución del pensamiento matemático vinculado al desarrollo de las competencias y habilidades lógicas y de razonamiento abstracto.

En la última década se han puesto en práctica diversos proyectos de "culturización matemática". Muchos parten de la visión del filósofo y matemático inglés Alan Bishop quien propone que las matemáticas son "más una forma de pensar que una forma de hacer" y parten de la idea general de que si se quiere mejorar la enseñanza de las matemáticas, de forma efectiva, habría que incidir en su percepción social mediante campañas de difusión y divulgación.

La divulgación de la ciencia ha tomado en los últimos años una enorme fuerza y su impacto social es cada vez más evidente. Los académicos tenemos una gran tarea por delante: llevar las matemáticas a los rincones más lejanos de la sociedad también es nuestra labor. Es por ello que la comunicación de las matemáticas surge para mejorar la percepción que tienen las personas de las matemáticas al atraer a un público amplio.

Entre los países que se han preocupado por llevar las matemáticas "a la calle" figuran Finlandia, Dinamarca, Austria, India, España, Colombia, Brasil, Argentina y Chile. En todos ellos, diversas actividades de matemáticas como las ferias científicas y las exposiciones han sido tan exitosos que ahora se repiten año tras año y capitalizan el esfuerzo de vincular a la academia con la sociedad. En México existen diversos antecedentes de esfuerzos similares tanto en el ámbito de las matemáticas como en el de otras ciencias. Podemos afirmar, sin lugar a dudas, que este tipo de eventos han rebasado las expectativas que se plantearon en un inicio.

Durante 2012, el grupo del SUMEM dedicado a la difusión y divulgación de las matemáticas realizó varias actividades para incidir en esta percepción en el bachillerato UNAM: un Concurso de Aplicaciones Matemáticas, un Ciclo de Cinedebate y el Día de Pi. Consideramos que todas ellas despertaron el interés en la población escolar y nos mostraron que favorecieron el desarrollo de actitudes positivas hacia las matemáticas.

Por todo lo anterior, para modificar la percepción social de las matemáticas y acercarlas a los estudiantes de bachillerato, se propone realizar campañas sociales que involucren actividades distintas o similares a las ya realizadas. A partir de ellas, se podría generar una Cultura Matemática donde se favorezca que los matemáticos se relacionen con niños, jóvenes y adultos para que éstos conozcan qué son las matemáticas, cómo se desarrollan y aplican en nuestro país y de qué manera se relacionan con la vida cotidiana. Al mismo tiempo, que se propicia entre la población el gusto por las matemáticas. No debemos olvidar que cualquier programa de mejora de la enseñanza de las matemáticas, siempre se verá fortalecido con campañas y acciones que incidan positivamente en su aprecio social.

El SUMEM pretende fomentar una actitud favorable hacia el aprendizaje de las matemáticas y a la inserción de la Cultura Matemática en la sociedad. Con este fin se organizarán eventos públicos, conferencias, talleres, y se utilizarán diversos medios para campañas de publicidad; se hará divulgación mediante medios impresos, multimedia y de comunicación y además se llevarán a cabo concursos de matemáticas y actividades de artes plásticas, gráficas y visuales en relación con ésta.

Se propone dar una visión al público general de que las matemáticas son una disciplina que:

- Tiene relación con todos los campos del conocimiento, sean estos artísticos, sociales, humanísticos, tecnológicos o científicos.
- Forma un pensamiento ordenado, clarificador y lógico.
- Ayuda a entender fenómenos en forma cuantitativa y precisa por medio de la modelación.
- Constituye uno de los máximos logros de la cultura.
- Es uno de los pilares de la vida moderna.
- Fomenta el sentido estético del razonamiento abstracto.
- Favorece la especulación filosófica sobre el conocimiento y su naturaleza.
- Fundamenta el desarrollo lógico digital.
- Abre actualmente nuevas perspectivas en el desarrollo de las ciencias biológicas, económicas y sociales.

Se pretende además reforzar las nociones acerca de:

- Las diversas representaciones que los conceptos de las matemáticas tienen en el mundo real.
- El sentido estético inherente a las matemáticas.
- Que el hecho de hablar de matemáticas refuerza las habilidades de comprensión y actitud hacia la misma disciplina.

Capítulo 10

Estructura organizativa de las actividades académicas del SUMEM

Capítulo 10
Estructura organizativa de las actividades académicas del SUMEM

10.1 Introducción

Las actividades académicas encaminadas a la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas quedan englobadas en los tres siguientes rubros: *Formación y actualización de profesores, actualización curricular y estrategias didácticas para el fortalecimiento del aprendizaje*. El mejoramiento de estos rubros requiere el esfuerzo continuo y constante de todos los sectores de la UNAM, directamente involucrados en la difusión, la comunicación y la generación de nuevo conocimiento.

Para esto ha sido necesario crear un órgano, que con base en la reflexión constante sobre la actividad docente, proponga e impulse medidas para fortalecer su práctica. Es importante lograr la participación de los profesores del bachillerato y mantener un ambiente permanente de discusión y análisis del proceso de enseñanza-aprendizaje, que permita la mejora constante de la docencia y favorezca la interacción de los profesores que tengan interés en la enseñanza.

Tareas primordiales son el diseño, desarrollo e instrumentación de estrategias. Puesta en práctica de proyectos y actividades de educación matemática con contenidos interdisciplinarios, que vinculen a las matemáticas con la vida real, que aprovechen las habilidades y conocimientos previamente adquiridos por el estudiante y que resalten la aplicación práctica y el valor del conocimiento humano como agente de cambio.

10.2 Acuerdo de creación del SUMEM

Con estos fines se creó el día 12 de septiembre de 2013 por acuerdo del Rector[4], el **Seminario Universitario para la Mejora de la Educación Matemática en la UNAM** (SUMEM) cuya labor será, en términos generales, crear materiales para la enseñanza, diseñar y mantener actividades de formación y actualización de profesores, estudiar y revisar avances sobre la educación matemática, a nivel nacional e internacional, y fortalecer

4 Gaceta UNAM, 12 septiembre de 2013, pp. 21-22.

vínculos con el sector educativo. Concretamente, su objetivo principal es fomentar en los miembros de la comunidad universitaria lo siguiente:

I) El desarrollo del pensamiento matemático y razonamiento lógico.
II) La comprensión de conceptos matemáticos fundamentales.
III) El desarrollo de habilidades para la resolución de problemas dentro y fuera del ámbito matemático.
IV) El desarrollo de destrezas en el uso de las tecnologías para facilitar la resolución de problemas y la adquisición de conocimientos.
V) Una visión integradora en la enseñanza de las matemáticas.
VI) La formación pedagógica de los profesores de matemáticas.
VII) El uso de ejemplos prácticos provenientes de otras disciplinas para la enseñanza de las matemáticas.
VIII) El pensamiento y aplicaciones matemáticos empleados en las asignaturas de todas las disciplinas.
IX) Los valores humanos que soportan los procesos de enseñanza, aprendizaje e investigación de las matemáticas.

Para incidir en estas metas se realizarán diversas actividades como:

I. Estudiar, revisar y discutir los avances en materia de enseñanza matemática en la universidad, en el país y en el extranjero.
II. Apoyar el análisis y diseño de programas de enseñanza matemática.
III. Proponer y ofrecer actividades de formación y actualización de profesores de matemáticas y otras disciplinas afines.
IV. Instrumentar y evaluar estrategias para abatir el rezago en materia de educación matemática.
V. Crear materiales para la enseñanza de las matemáticas, así como propiciar el diseño y la creación de recursos multimedia e informáticos para apoyo didáctico.
VI. Fomentar el uso de *software*, aplicaciones y recursos en línea como apoyo didáctico.
VII. Organizar coloquios, seminarios, cursos, diplomados y congresos con participantes nacionales y extranjeros.
VIII. Generar publicaciones sobre Educación matemática.

10.3 Plan de trabajo anual

Los primeros esfuerzos del SUMEM se centrarán en *la formación y la actualización permanente de profesores; en el análisis a fondo de los aprendizajes* que, al término del ciclo, los estudiantes deben poseer -qué contenidos se deben atender para lograr tales aprendizajes-; y en la *formación de una cultura de la evaluación formativa en el aula* que establezca las bases para retroalimentar las líneas de trabajo a desarrollar en la formación de profesores y para proponer futuros cambios al currículo matemático.

Con este fin, durante el período octubre 2013-junio 2014 se emprenderán las siguientes acciones:

1. Revisión conjunta con los profesores del bachillerato del presente documento: *Consideraciones para la mejora de la educación matemática en la UNAM.* Con atención especial al análisis de los estándares propuestos y de la muestra de problemas ilustrativos (Capítulos 3 y 4) para mejorarlos e identificar los recursos necesarios para lograrlos en la práctica.
2. Establecer las características y los detalles de *un Programa Permanente de Formación de Profesores* cuyos primeros planteamientos se encuentran en el Capítulo 7 y definir un plan de trabajo a desarrollar a partir de agosto de 2014.
3. *Estudio de la evaluación en el aula* esbozada en el Capítulo 6 y sus conexiones con la investigación educativa que se puede desarrollar en el aula a partir del quehacer cotidiano, esto con el fin de establecer lineamientos de trabajo para el fomento de una cultura de evaluación formativa en el aula y de investigación por parte del profesor y de los estudiantes.
4. Implementar las líneas de acción en cuanto a la difusión y la divulgación de la Cultura Matemática dentro y fuera de la UNAM.

10.4 Estructura organizativa del trabajo

Se propone el siguiente esquema para el seminario con una estructura de mentoría conformado por 3 grandes bloques: el bloque A es el de los asesores; el B está conformado por los tutores y el C por profesores en el aula. Los miembros del grupo A, comité técnico, conocen profundamente los conceptos y principios descritos en este documento y su labor es coordinar y organizar las actividades acordadas por el comité directivo del SUMEM. Estará conformado por profesores y representantes de las entidades participantes. El grupo B, de tutores, estará conformado por profesores del bachillerato, quienes participarán en los seminarios y actividades del SUMEM. Se buscará que haya un grupo de tutores en cada plantel del bachillerato y se espera que en una etapa inicial esté conformado por 30 profesores. Los tutores atenderán en su plantel respectivo, a un grupo de profesores y su labor será la de facilitar el desarrollo de la práctica docente con base en las propuestas y materiales dándole seguimiento a las actividades. Los resultados y observaciones obtenidos servirán para mejorar el proceso de formación y actualización de profesores, así como el de diseño y creación de propuestas y materiales; en particular, pasarán a formar parte de los temas de discusión del seminario.

Es importante mencionar que esta estructura no es jerárquica y sólo pretende describir las distintas clases de actividades que permanentemente se realizarán. Las actividades del seminario, serán en la modalidad presencial, semi-presencial o a distancia.

Referencias

ANUIES (2008), *Programa de Formación Docente de la Educación Media Superior*, recuperado el 28 de septiembre de 2013 de http://certidems.anuies.mx/profordems/

Balanced Assessment Project (2000), *Advanced High School Assessment,* Dale Seymour Publications, Parsippany, NJ.

J. Bracho, M L. Marquina, S. Rajsbaum (compiladores). Enciclopedia de Conocimientos Fundamentales, Vol. 5. UNAM-Siglo XXI (2010). ISBN Vol. UNAM 5: 978-607-02-1782-1

Caballero, María Emilia. Aportaciones de Fermat a la teoría de la probabilidad. Miscelánea Matemática 34 (2001) 85-102, pp. 85-90. Sociedad Matemática Mexicana. México.

Cazorla, I. y Ribeiro, E. (org.). *Do Tratamento da informação ao letramento estatístico*. Série Alfabetização Matemática, Estatística e Científica, Ed. Via Litterarum, Itabuna – Bahia, Brasil, Julio de 2010.

Clarke, D. (1997), *Constructive Assessment in Mathematics: practical steps for classroom teachers*, Key Curriculum Press. Berkeley, CA.

de Boer, H.; Donker-Bergst, A.; y Kostons, D. (2013). *Effective Strategies for Self-regulated Learning: A Meta-Analysis*. Disponible en: http://gion.gmw.eldoc.ub.rug.nl/FILES/root/2013/EffectiveStrategies/EffectiveStrategies.pdf.

Diario Oficial de la Federación (2009), *Acuerdo número 486 por el que se establecen las competencias disciplinares extendidas del Bachillerato General*. Recuperado el 28 de septiembre de 2013 de http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/10905/1/images/Acuerdo_486_competencias_extendidas.pdf

R. D. Driver. Why Math?. Springer Verlag (1984). ISBN 0-387-94427-3

M. Falconi, V. Hoyos (compiladores). Instumentos y Matemáticas, Historia, fundamentos y perspectivas educativas. Las prensas de ciencias (2005). ISBN 970-32-2510-1

Hansem, ;Meshulam y Parker (2013). *Assessing the Effectiveness of a Learning Community Course Design to Improve the Math Performance of First-Year Students*, disponible en http://washingtoncenter.evergreen.edu/lcrpjournal/vol1/iss1/10/

Hardré, P.L.; C. Ling; R.L. Shehab; M.A. Nanny; M.U. Nollert; H. Refai; C. Ramseyer; J. Herron; E.D. Wollega. (2013). Teachers in an interdisciplinary learning community. Engaging, integrating, and strengthening K-12 education, *Journal of Teacher Education*, disponible en: http://jte.sagepub.com/content/early/2013/07/30/0022487113496640.full

Hudson Bailey, P.R. (2013). *Developing rich tasks: Influence on planning and implementing mathematics instruction*. Ph.D. dissertation. Disponible en: http://digilib.gmu.edu/dspace/bitstream/1920/8190/1/Bailey_gmu_0883E_10241.pdf

Iossi, L. (2013) Strategies for Reducing Math Anxiety in Post-Secondary Students In S. M. Nielsen& M. S. Plakhotnik (Eds.), Proceedings of the S*ixth Annual College of Education Research Conference: Urban and Education Section* (pp. 30-35). Miami: Florida International University. Disponible en: http://coeweb.fiu.edu/research_conference/

Koedinger, K.R. y Roll, I. (2011). *Learning to think: Cognitive mechanisms of transfer knowledge*. Disponible en: http://www.academia.edu/2743664/Learning_to_think_Cognitive_mechanisms_of_knowledge_transfer

Kyriacou , C. (2013). *A systematic review of strategies to raise pupils' motivational effort in Key Stage 4 Mathematics*. Disponible en: http://www.eppi.ioe.ac.uk/cms/Default.aspx?tabid=714

Landry, S. (2012). *A study of the impact of instructional approach on community college students' problem solving and metacognitive abilities in the developmental mathematics course, Introductory Algebra*. Tesis doctoral disponible en: http://scholarworks.uno.edu/td/1547/

Lesh, R.A. y Sriraman, B. (2012). Theories of learning mathematics. En S. Lerman (ed). *Encyclopedia of Mathematics Education*. Article 31336, Chapter 157. Disponible en: http://www.math.umt.edu/sriraman/files/TheoriesofLearningMathematics.pdf

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA

OCDE (2006), *PISA 2006: Marco de la evaluación, conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura*, recuperado el 28 de septiembre de 2013 de http://www.oecd.org/pisa/39732471.pdf.

OECD (2012), *Equity and Quality in Education: Supporting Disadvantaged Students and Schools*, OECD Publishing. doi: 10.1787/9789264130852-en

Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (PISA), 2009 Results: Overcoming Social Background. *Equity in Learning Opportunities and Outcomes*, Volume II, 2010. Recuperado el 15 de mayo de 2013 en http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/48852584.pdf

Rodríguez, M. I. *Consideraciones acerca de la inferencia informal*. X Congreso Latinoamericano de Sociedades de Estadística. Córdoba, Argentina. 16 al 19 de octubre de 2012.

Ryve, A.; Nilsson, P; Mason, P. (2011). Establishing mathematics for teaching within classroom interactions in teacher education, *Education Studies in Mathematics. An International Journal*, disponible en: http://link.springer.com/article/10.1007/s10649-011-9371-9/fulltext.html

Salcedo, A. *Cultura, Razonamiento y Pensamiento Estadístico*. Hipótesis Alternativa, Boletín de IASE para España, México y Venezuela. Abril 2005. Vol 6 Nº 1, ISSN: 2244 – 8179. En http://www.ucv.ve/fileadmin/user_upload/cies/Documentos/Hipotesis_alternativa_N10.pdf al 28 de noviembre de 2013.

SEP (2011), *Acuerdo número 512 por el que se establece la articulación de la Educación Básica*. Secretaría de Educación Pública, México.

SEP (2011), *Documento Base del Bachillerato General,* Subsecretaría de Educación Media Superior. México.

SEP (2013), *Estadísticas de resultados ENLACE*, recuperado el 28 de septiembre de 2013 de http://enlace.sep.gob.mx/ba/resultados_anteriores/

Simon, M.A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective, *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), disponible en: http://www.jstor.org/stable/749205

Siyepu, S. (2013). The zone of proximal development in the learning of mathematics. *South African Journal of Education*, 33(2), disponible en http://www.ajol.info/index.php/saje/article/view/88410/78022

Stein, M.K.; Silver, E.A. y Smith, M.S. (2009/1998). Mathematics reform and teacher development: A community of practice perspective. En *Teaching practice in mathematics and science learning.* J.G. Greene y S.V. Goldman (eds.). New York, NY, USA: Routledge.

I. Stewart . The problems of mathematics.. Oxford university press (1992) . ISBN 0-19 219262-0

UNESCO (2011), *Estado del Arte sobre políticas docentes en América Latina y el Caribe*, recuperado el 28 de septiembre de 3013 de http://www.orealc.cl/docentesyevaluacion2012/2012/05/04/estado-arte/?lang=en

Webb, N. (2009). Depth of knowledge for mathematics. *Better evidence – based education*, 2(1), 14-15.

Glosario

Aprendizaje

Consideramos que el *aprendizaje es una actividad compartida; tanto por el profesor, como por el alumno. El profesor ha de ayudar a los alumnos a cambiar la interpretación del mundo que los rodea. Las investigaciones sobre enfoques de aprendizaje han dado lugar a una nueva área de investigación que mezcla el estudio del contexto educativo, la percepción de los estudiantes y la metodología de la psicología cognitiva.*

Las corrientes en el estudio del aprendizaje se han agrupado en torno a diferentes orientaciones, modelos, esquemas, estilos y hasta enfoques que coinciden en tres dimensiones para su éxito: la conciencia que el estudiante tiene acerca del aprendizaje, el contenido del objeto y las demandas características del contexto.

Al respecto diversos autores como Marton, Säljö, Svensson, Entwistle, Biggs, etc, sugieren que el contexto docente, tiene un rol indiscutible en el modo de abordar el aprendizaje, ya que depende de la percepción que el sujeto tenga de lo que se le exige o de lo que considere decisivo en términos de la evaluación, los métodos de enseñanza, los procedimientos de evaluación, etc. parecen ser factores decisivos en la configuración de los enfoques.

Otra consideración respecto a la conciencia del estudiante acerca del aprendizaje son sus preferencias instruccionales que describen la relación que existe entre las preferencias que los estudiantes manifiestan por los tipos de enseñanza, la orientación en el estudio y la preferencia por diferentes ambientes de aprendizaje.

Además, en las dimensiones se considera que las características del estudiante y el contexto de enseñanza, los enfoques de aprendizaje y los resultados del aprendizaje dependerán de si en el aula se sigue desde enfoques típicamente tradicionales, en donde las evaluaciones son cuantitativas, en términos de medir el aprendizaje a través del dominio de conceptos, hasta concepciones más estratégicas, en términos, de la adaptación del docente a las diferentes necesidades de aprendizaje que cada alumno plantea.

La visión estratégica, se basa en un interés por las materias y busca maximizar la comprensión, de tal forma que la curiosidad sea satisfecha. El estudiante que adopta este enfoque tenderá a:

- Mantener una concepción cualitativa del aprendizaje.
- Ver la tarea interesante implicándose en ella.
- Centrarse más en la comprensión que en los aspectos literales.
- Integrar los componentes de la tarea entre sí y con otras tareas.
- Relacionar la tarea con lo que ya conoce, discutiéndola con otros.
- Teorizar acerca de la tarea y formar hipótesis sobre el modo de relacionar los conocimientos.
- Ver la tarea como un medio de enriquecimiento personal.
- Ver el aprendizaje emocionalmente satisfactorio.

La idea es ayudar a los estudiantes a que sean conscientes de sus propios procesos de aprendizaje, para lo cual su mejoría de aprendizaje depende de roles más estratégicos que adopta el docente, y además del apoyo de la tutoría, asesoría, orientación y mentoría que permiten intensificar la motivación y todos aquellos factores de contexto que promuevan en nuestros estudiantes un perfil de aprendizaje profundo (proceso) y de calidad (producto).

A lo largo de las siguientes páginas, se abordan los conceptos generales que definen a la tutoría, asesoría, orientación y mentoría y que creemos pueden ser motivo de reflexión para los lectores, ya que el aprendizaje es responsabilidad compartida entre estudiantes y profesores.

Tutoría

La tutoría es una actividad pedagógica y complementaria a la docencia que tiene como propósito orientar y apoyar de manera integral a los alumnos durante su proceso de formación, a partir del conocimiento de sus problemas y necesidades académicas, así como de sus inquietudes y aspiraciones profesionales.

Mucha gente confunde el término asesoría con tutoría y es importante diferenciar una de la otra. En este caso diremos que la tutoría es una actividad que se difunde únicamente mediante consultas que brinda algún sabido en el tema en particular (generalmente profesores) durante sus horas laborales, para fomentar actitudes y valores positivos en el estudiante.

Por ello, la tutoría es entendida como un **proceso de acompañamiento** durante la formación de los **estudiantes**, que se lleva a cabo mediante la atención personalizada. Algunos de sus objetivos son la solución de los problemas escolares y el mejoramiento de la convivencia social.

La tutoría también busca reducir los índices de reprobación y disminuir las tasas de abandono de los estudios. Se utiliza para brindar **enseñanza compensatoria o complementaria** a aquellos estudiantes que presentan dificultades en el **aprendizaje** o que no logran participar con éxito de los programas de enseñanza regular.

En este sentido, la actividad de la tutoría es complementaria a la de la docencia y no pretende sustituirla. Ambas comparten en algún momento la función de la asesoría. En el caso de que el tutor o el profesor brinden al estudiante un apoyo académico específico para aclarar dudas o asegurar el aprendizaje de un contenido particular, donde el estudiante está teniendo dificultades.

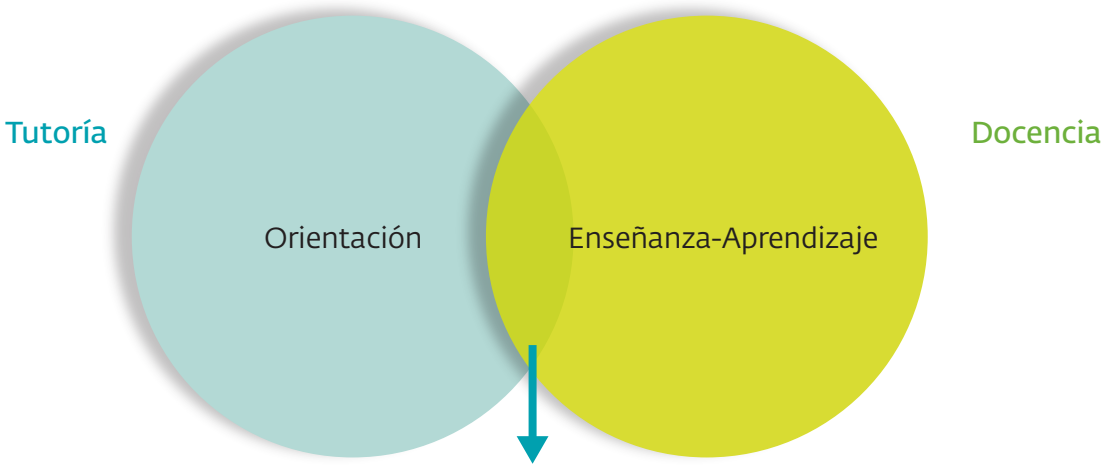


Diagrama 4. Diagrama de la tutoría como una actividad complementaria.

La tutoría tiene dos propósitos generales:

- Favorecer el desempeño académico de los alumnos.
  5. Fortalecer el uso de las metodologías de estudio adecuadas a su profesión.
  6. Desarrollar habilidades para la autorregulación del estudio y así promover el aprendizaje autónomo durante toda su vida.
  7. Identificar las dificultades académicas del estudiante para darles atención directa a través del tutor o actividades complementarias de las entidades universitarias.

- Contribuir con la formación integral del estudiante.
  1. Desarrollar en el estudiante actitudes favorables hacia la disciplina de trabajo.
  2. Promover en el estudiante una actitud de superación permanente.
  3. Incidir en la formación de valores y actitudes para el desarrollo integral como ser humano.

- Funciones del Tutor
  1. Participar en el diagnóstico individual y grupal utilizando los medios acordados y establecidos por la comisión de tutorías.
  2. Intervenir directamente en la orientación vocacional y pedagógica o académica general que requieren los tutorados, en función de necesidades individuales o grupales.
  3. Orientar a sus tutorados sobre los servicios institucionales tales como: servicio social, opciones de titulación, competencias académicas, concursos de creatividad, cursos, etc. si así lo requieren sus tutorados.
  4. Derivar a los estudiantes que requieran apoyo psicológico.
  5. Mantenerse informado de los horarios y alternativas de asesoría específica en las materias más importantes, y brindar cada vez que se requiera dicha información a sus tutorados.
  6. Brindar información disponible y en su caso, canalizar a la coordinación del plantel, los casos de alumnos que se interesen por algún programa en específico.

Asesoría

La asesoría se considera una actividad de apoyo a la formación del estudiante, encaminada a dar soporte académico para objetivos específicos como podría ser subsanar deficiencias de aprendizaje en una asignatura o temas específicos. En el desarrollo de una tesis, por ejemplo, el asesor tiene la función de orientar al estudiante en áreas específicas del desarrollo de la misma.

Orientación

La orientación es un proceso de ayuda que puede tener diferentes núcleos de acción. Puede estar encaminada, entre otras finalidades, al desarrollo personal del individuo, a atender dificultades específicas con relación al proceso de aprendizaje, o bien, a la inserción en el ámbito laboral. Parte de las responsabilidades del tutor es brindar orientación al estudiante para dar atención a las necesidades personales y académicas que se identifiquen en el proceso de tutoría.

Mentor

El concepto de mentor tiene su origen en la historia de Mentor narrada en la Odisea de Homero. En general se considera que el mentor brinda apoyo, orientación y acompañamiento a una persona durante un periodo más extenso de tiempo que el destinado a la tutoría. En algunos países, por ejemplo Estados Unidos de Norte América, es más común utilizar el término mentor al referirse a la función de acompañamiento y de orientación que realiza un maestro y que sería equivalente al término de tutoría que aquí utilizamos. La figura del mentor es usual en el campo de los negocios, en donde una persona experimentada acoge bajo su protección a otro individuo que se encuentra en proceso de formación.

Consideraciones para la mejora de la educación matemática en la UNAM

Editada por la Universidad Nacional Autónoma de México.

Se terminó de imprimir el _____ de 2014

en Avenida Universidad No 3000, Ciudad Universitaria,

Coyoacán, 04510, México, D.F.; tel.: 5622 5909.

El tiraje constó de XXX ejemplares,

más sobrantes para reposición.

Forros impresos en cartulina sulfatada 12 pt

e interiores en una tinta en papel bond de 75 g.

Formación y composición tipográfica

en tipo Warnock Pro 11 puntos y Fedra Sans 12 puntos,

imprimiéndose en prensa digital.

El cuidado de la edición estuvo a cargo

de Manuel Jesús Falconi Magaña, Ángel Homero Flores Samaniego

y Manuel Hernández Rosales.